APROXIMACIONES A LA DISTRIBUCION FINITA DE CRITERIOS JI- CUADRADO: UNA NOTA INTRODUCTORIA

Ignacio Mauleón

Banco de España. Servicio de Estudios
Documento de Trabajo n.º 8406

ISBN: 84-500-9910-2

Depósito legal: M. 13566 - 1984

Talleres Gráficos del Banco de España

I N D I C E

I. Introducción (*)

En Estadística, y en Econometría en particular, uno de los campos más inexplorados es el de las distribuciones en muestras finitas. Los resultados asintóticos están muy desarrollados y se dispone de ellos con facilidad para casi todas las situaciones. Sin embargo, cualquier simulación con datos artificiales, por ingenua que sea, muestra los errores a veces muy considerables, cometidos por las aproximaciones asintóticas. Estos errores a veces se atenuan considerablemente mediante la introducción de factores de corrección, pero generalmente no es así.

En los últimos años una corriente sustancial de investigación se ha centrado en este campo (por ejemplo, Sargan, Phillips, Rothenberg, por citar sólo algunos nombres, han publicado numerosos trabajos sobre este tema). Aunque los resultados no están todavía totalmente disponibles para su aplicación en general, en muchos casos los resultados de estas investigaciones empiezan a ser fructíferos.

Esta nota, recoge los puntos esenciales de una contribución a este campo, realizada por el autor. La nota es un resumen de la prueba de un teorema, de la obtención de la correspondiente aproximación, y de un planteamiento general del problema. La aproximación que se obtiene es del tipo,

$$P\left[Te(q) \leqslant r^2\right] = \Phi(r^2) + f(r^2)\, W(r) + O(T^{-3/2})$$

donde $Te(q)$ es el criterio cuya distribución finita se trata de aproximar, $\Phi(.)$ y $f(.)$ son respectivamente las funciones de distribución y densidad de una distribución Ji-cuadrado (χ^2_k) de 'k' grados de libertad, y $W(.)$ es un polinomio finito cuyos coeficientes dependen de las derivadas de $e(.)$ y de los cumulantes del vector 'q'.

(*) El trabajo a que aquí se hace referencia es la tesis doctoral del autor, realizada bajo la supervisión de J.D. Sargan.

II. Derivación de la aproximación

El método más conocido para obtener aproximaciones a funciones de distribución de probabilidad desconocidas es probablemente el de Edgeworth. Este método puede ser resumido brevemente del modo siguiente, y está basado en la inversión de la función característica aproximada, de la variable cuya distribución se quiere aproximar (puede verse también [10]). Llamando a esta variable 'y' y a su función de densidad h(y), su función característica está definida como de costumbre por

$$\psi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isy}\, h(y)\, dy$$

que también puede ser escrita como

$$(1) \quad \psi(s) = e^{\sum_{r=1}^{\infty} K_r \frac{s^r}{r!}}$$

donde $K_r = \frac{d^r}{ds^r}\left[L\psi(s)\right]_{s=0}$, es decir, el cumulante de orden 'r', y donde hemos supuesto que todos ellos existen.

Consideremos ahora otra variable 'x', con funciones de densidad y función característica g(x) y, $\Phi(s)$ respectivamente, y definamos sus cumulantes, γ_r, de modo que

$$(2) \quad \Phi(s) = e^{\sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r \frac{s^r}{r!}}$$

De (1) y (2) obtenemos ahora fácilmente

$$(3) \quad \psi(s) = e^{\sum_{r=1}^{\infty} (K_r - \gamma_r)\, s^r/r!} \;.\; \Phi(s)$$

Supongamos que 'x' ha sido escogida adecuadamente de modo que $|K_r - \gamma_r| = 0\,(T^{-1/2\ r})$ (ver también [5]). Por ejemplo, si 'y' es asintóticamente normal $K_r \longrightarrow 0$ $\forall r > 3$, cuando $T \longrightarrow \infty$, puesto que la función característica de una normal solo tiene primeros y segun dos cumulantes distintos de cero, ya que es igual a

$$e^{is'm + i^2 s' \Sigma s/2}$$

Los primeros cumulantes son las medias y los segundos la matriz de covarianzas. En este sentido, los cumulantes de orden mayor que el segundo, distintos de cero, pueden ser considerados como un relajamiento del supuesto de normalidad. En este ejemplo si 'y' es asintóticamente normal, una elección adecuada para 'x' es precisamente la distribución normal.

Expandiendo el exponente de (3) es fácil ver que puede obtenerse una expresión del tipo

$$(4) \quad \psi(s) = (1+ \sum_{r=1}^{k} Q_r(s) \; T^{-1/2\; r}) \;\; \Phi(s) + \;\; (T^{-1/2\,(K+1)})$$

donde $Q_r(s)$ es un polinomio en (is) con coeficientes de orden uno en T. Ahora, invirtiendo la aproximación de (4) obtendremos una aproximación a la función de densidad de 'y', es decir

$$(5) \quad h(y) = (\frac{1}{2.\pi})\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isy} \; (1+ \sum_{r=1}^{k} Q_r(s) \; T^{-1/2\; r}) \; \Phi(s) \; dy$$

El problema que queda es como obtener explícitamente esta integral. Para ello, consideremos la inversa de Φ (s),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx} \;\; \Phi(s) \; ds = (2\;\pi) \;\;\; g(x)$$

y tomemos derivadas con respecto a 's', 'r' veces, con lo que obtenemos

$$(5\text{-bis}) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx} (is)^r \;\; \Phi(s) ds = (2\;\pi) \;\; (-1)^r \; [D^r g(x)]$$

lo que nos dice directamente que $(is)^r\ \Phi(s)$ es la función característica de $(-1)^r D^r g(x)$. Pero la aproximación de (4) es precisamente una suma de términos del tipo $[(is)^r\ \Phi(s)]$, con lo que ya hemos obtenido una expresión para (5) es decir para la densidad aproximada de 'y', en términos de $D^r g(x)$. Ahora, a no ser que 'g(x)' tenga una forma especial, suele ser posible escribir

$$(6) \quad D^r g(x) = P_r(x)\ g(x)$$

donde $P_r(x)$ es un polinomio en 'x' de orden 'r'.

Sustituyendo finalmente (6) en (5-bis) y este en (4) obtenemos la expresión explícita para la función de densidad aproximada como

$$(7) \qquad h(y) = (1 + \sum_{r=1}^{k} N_r(y)\ T^{-1/2\ r})\ g(y) + 0(T^{-1/2\ (K+1)})$$

donde ahora $N_r(y)$ es un polinomio en 'y', cuyos coeficientes dependen de los cumulantes de 'y'. Es decir, requerimos un conocimiento explícito de los cumulantes de 'y' para poder evaluar (7) (los de 'x' se supone que son fácilmente deducibles).

La aproximación a la función de distribución de 'y'puede ser obtenida de un modo similar, o simplemente integrando (7) lo que nos da

$$(8)\ F(y) = \Phi(y)\ \{1 + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r(y)\ T^{-1/2\ r}\} + 0\ (T^{-1/2(K+1)})$$

donde $\Phi(y)$ es la fc. de distribución conocida de x. Es decir, la distribución finita de 'y'puede ser aproximada por un primer término que es la distribución asin tótica más una suma de términos de orden decreciente en T, con la propiedad de que el orden del término de error es el mismo que el del último término no considerado en la aproximación. En este sentido se puede decir que la distribución de 'y' para T finito posee una expansión asintótica válida.

Alternativamente, y como a los polinomios $\lambda_r(y)$ hemos llegado después de realizar la substitución $D^r g(y) = P_r(y)\ g(y)$, se puede expresar (8) del modo siguiente

$$(9)\quad F(y) = \Phi(y) + g(y) \{ \sum_{r=1}^{k} \lambda^*_r(y)\ T^{-1/2\ r} \} + 0(T^{-1/2(K+1)})$$

que es un tipo de expresión más similar al obtenido usualmente en la literatura econométrica. (Ver por ejemplo [3], [2]).

Si la "función de desarrollo" en (3), es decir $\Phi(s)$, es la función característica de una distribución normal obtenemos la expansión clásica de Edgeworth. Pero esta metodología puede ser utilizada con otras distribuciones, y así, si utilizamos las distribuciones γ o β, los polinomios de (6) serían los de Laguere y Jacobi respectivamente, mientras que en el caso de la distribución normal corresponden a los bien conocidos polinomios de Hermite. Estos polinomios están discutitos en [8].

En el caso que nos ocupa, podríamos utilizar una $\gamma(\frac{1}{2}, \frac{K}{2})$ para aproximar la distribución de 'y' si su límite asintótico es una χ^2_k. Sin embargo debido a consideraciones de tipo fundamentalmente algebraico, la expansión en este caso es más sencillo obtenerla por otros métodos. Más concreta mente lo que tenemos es una expresión del tipo $y=Te(q)$ donde q es una variable aleatoria multivariante con una densidad finita desconocida pero que admite una expansión asintótica del tipo indicado en (7). La variable 'y' estará distribuída asintóticamente como una χ^2_k y para aproximar su distribución consideraremos primero una aproximación a la densidad finita de 'q' , y posteriormente una aproximación de Te (q) como un polinomio en q.

Es interesante ver a través de un ejemplo como un test χ^2_k puede ser escrito de esta forma. Consideremos el modelo

$$(10)\quad Y_t = \alpha Y_{t-1} + X_t'\beta + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2_\varepsilon)$$

$$= z_t' \gamma + \varepsilon_t \qquad E(\varepsilon_t\, \varepsilon_\tau) = 0 \quad t \neq \tau$$

donde los x's son no estocásticos (o alternativamente, el análisis es condicional a sus valores observados, lo que no quita generalidad al planteamiento). El test de $\beta=0$ puede escribirse como

$$(11)\qquad C = \frac{(\hat{\beta} - \beta)(X'M_Y X)(\hat{\beta} - \beta)}{\hat{\sigma}^2} \underset{A}{\sim} \chi^2_k$$

donde $\hat{\sigma}^2 = (\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}/T-K)$, $M_Y = [I - Y_{-1}(Y_{-1}'Y_{-1})^{-1}Y_{-1}']$

o alternativamente

$$C = \frac{(\varepsilon' M_Y X)\ (X'M_Y X)^{-1}(X'M_Y \varepsilon)}{\hat{\sigma}^2} \underset{A}{\sim} \chi^2_k$$

Consideremos ahora los siguientes momentos muestrales,

(12) $q_1 = (Y'Y)/T$

$$q_2 = (Y'_{-1}Y_{-1})/T$$

$$q_3 = (Y'_{-1}Y)/T$$

$$\begin{pmatrix} q_4 \\ \vdots \\ q_{k+4} \end{pmatrix} = (X'Y)/T$$

$$\begin{pmatrix} q_{k+5} \\ \vdots \\ q_{2k+4} \end{pmatrix} = (X'Y_{-1})/T$$

Parece claro ahora que podemos escribir

$$C = T\,\dot{e}\,(q) \qquad q = (q_1 \ldots q_{2k+4})$$

es decir que C puede de hecho definirse como una función de estos momentos. En general, los test standard en Econometría van a depender de este tipo de momentos así que el planteamiento es general [4]. Sin embargo, un requerimiento importante que no siempre es cumplido es que la dimensión de 'q' sea independiente de T (por ejemplo falla en modelos de medias móviles)

Consideremos ahora

$$\frac{Z'\varepsilon}{T} = \frac{Z'Y}{T} - \frac{Z'Z\gamma}{T}$$

y como $E(Z'\varepsilon) = 0$, puede obtenerse con facilidad

(13) $$\frac{Z'\varepsilon}{T} = A\,(q-\mu)$$

donde $\mu = Eq$ y A es una matriz cuyos elementos son funciones del vector de parámetros del modelo . Definiendo la matriz de selección $S = (0;\ I_3)$ y

$$\left(\frac{Z'Z}{T}\right) = \hat{M} \quad ; \qquad \text{plim}\,\hat{M} = M$$

podèmos escribir

$$(14) \quad \hat{\beta} = S\,\hat{M}^{-1}\,Z'Y/T$$
$$= \beta + S\,\hat{M}^{-1}\,A(q-\mu)$$

Y así, es claro que $\hat{\beta} = \beta\,(q)$ y que $\beta(\mu) = \beta$. De modo análogo puede verse que $\sigma^2(\mu) = \sigma^2$, cuando no se corrige por grados de libertad, y que será el estimador que consideraremos en lo sucesivo.

De este modo es fácil ver que la varianza asintótica de $\hat{\beta}$ es $AV(\,(\hat{\beta}-\beta\,)\sqrt{T}) = \text{plim}\;\hat{\sigma}^2(S\,\hat{M}^{-1}S')$

Y así el test χ^2 puede escribirse de un modo más conveniente para nuestros propósitos como,

$$(15) \quad C = \frac{(q-\mu)'\;A'\;\hat{M}^{-1}S'\;[S\;\hat{M}^{-1}S'\,]^{-1}\;S\;\hat{M}^{-1}\;A(q-\mu)}{\hat{\sigma}^2} * T$$

Sabemos que $(q-\mu)\sqrt{T} \underset{A}{\sim} N(0,\Omega\,)$ por resultados generales de estadística. Así, de (13) es evidente que

$$(16) \quad \sigma^2\;M = A\Omega\;A'$$

De hecho, si $\lim_{T\to\infty} \Omega_T = \Omega$, puede verse para este caso que

$$\hat{M}\;(\mu) = A\;\Omega_T\;A'$$

Escribiendo ahora (15) en la forma

$$(17) \quad C = (X'\;L^{-1'}\;A'(\hat{\sigma}^2\;\hat{M})^{-1}S'\;[S(\hat{\sigma}^2\hat{M})^{-1}\,S'\;]^{-1}\;S(\hat{\sigma}^2\hat{M})^{-1}AL^{-1}X)T$$

donde $X = L\;(q-\mu)$ y $\Omega_T^{-1} = L'L$, vemos que $X \underset{A}{\sim} N(0,I)$.

Además utilizando la propiedad (16) es fácil ver que la matriz de (17) evaluada en $Eq=\mu$, es idempotente y de rango K. Es evidente que C $(q=\mu)=0$, $\delta C/\delta q\rfloor_{q=\mu} = 0$, y escribiendo $\frac{\delta^2 C}{\delta q \; \delta q'}\rfloor_{q=\mu} = C_{qq}$, obtenemos expandiendo $C(q)$ alrededor de μ

$$(18) \quad C(q) = X' C_{qq} X + 0(1/\sqrt{T})$$

$$= \delta_T^2 + 0(1/\sqrt{T})$$

Como C_{qq} es idempotente, $X'C_{qq}X = Y'Y$ donde 'Y' es de dimensión 'K'. Y ahora podemos definir $\delta = + (Y'Y)^{1/2}$ $\mu = Y/\delta$. Así, $\delta_T^2 \underset{A}{\sim} X_k^2$ y el término de $0(1/\sqrt{T})$ será una función de δ y de μ.

Esta va a ser en líneas generales la forma de aproximar Te (q) como función de las variables 'q'. Antes de obtener la expansión para Te (q) requerimos la aproximación del tipo Edgeworth para la densidad finita de 'q'. La expansión asintótica para 'q' la obtendremos basándonos en la función de desarrollo normal (ver (7)) puesto que 'q' es asintóticamente normal. Para ello requerimos los cumulantes de 'q' y la función característica para obtenerlos por derivación. (Ver 9).

Definiendo las matrices H_i, $i=1,2,3$ del modo

$$(19) \quad q_3 = (Y_1' \; Y/T) = Y^{\circ\prime} H_3 Y^{\circ}$$

donde $Y^{\circ\prime} = (Y_T \; \ldots \; Y_1, Y_o)$

$$H_3^{+} = \frac{1}{T}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad H_3 = \frac{1}{2}(H_3 + H_3^{+\prime})$$

(y similarmente H_2 y H_1), y los vectores G_a, $a=4, \ldots K+4$

$q_{a+4} = G'_a Y°$

$G'_a = (X_{1T} \ldots X_{11}°)$ etc...

la función característica de los momentos muestrales 'q', es

(20) $$E\left[\exp\left(Y°'\left(\sum_{i=1}^{3} \theta_i H_i\right)Y° + \sum_{a=5}^{2k+4} \phi_a G'_a Y°\right)\right]$$

Como $Y°$ tiene una distribución normal, esta esperanza puede ser obtenida fácilmente. En particular, requerimos las medias de '$Y°$' y su matriz de covarianzas lo que puede ser obtenido como sigue:

(21) $$Y_t = m_t + V_t$$

$$m_t = \alpha\, m_{t-1} + X'_t\, \beta$$

$$V_t = \alpha V_{t-1} + \varepsilon_t$$

de modo que la varianza de $Y°$ es simplemente la de un proceso autorregresivo de orden uno. Existe un problema con las medias iniciales que no son observadas, en este caso 'm_o'. Hay diversos métodos de estimarlas, pero esto es ya un problema que excede el nivel de esta introducción.

Derivando ahora (20), los cumulantes se obtienen con facilidad. La solución explícita puede verse en [I]. De este modo, puede obtenerse explícitamente la aproximación del tipo Edgeworth a la distribución finita de q, hasta el orden de error en T que se desee. La función característica del criterio Te (q) puede escribirse

(22) $$\psi_{Te}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} is\ Te(q)\ dF\ (Te)$$

o equivalentemente

(23) $$\psi_{Te}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\ Te(q)}\ f(q)\ dq$$

La idea es ahora expandir Te (q) por Taylor, expandir el exponente, substituir f(q) por su aproximación, e integrar término a término. La inversa de esta función característica aproximada es la función de distribución aproximada de Te (q). La prueba de que el término de error no altera su orden de magnitud en T, a través de las sucesivas integraciones es complicada. Se requieren ciertas condiciones en las derivadas de (Te) que aseguren que pueden ser aproximado por Taylor, y ciertas condiciones en la función característica de q, ψ_q (s), que permitan aproximar su función de densidad por una expansión asintóticamente válida. Las condiciones no tienen una interpretación intuitiva sencilla y se omiten. De todas formas, una explicación intuitiva del teorema puede ser de utilidad.

Supongamos que se desea aproximar $P\left[Te(q) \leq r^2\right]$ cuando $Te(q) \underset{A}{\sim} \chi_h^2$ y 'q' es un vector de variables escogidas adecuadamente . El teorema requiere la definición de una variable 'δ' a partir de las variables 'q' tal que $\delta^2 \underset{A}{\sim} \chi_h^2$. Se establece un entorno del origen μ, en el que (Te) es invertible respecto a 'δ', entorno que será creciente con T. Es decir, Te (q) = Te *(δ, w) donde 'w' incluye el resto de las variables. En el entorno en que (Te) es invertible podemos escribir

$$P\left[Te\ (q) \leq r^2\right] \simeq P\left[\delta^2 \leq \psi\ (r,\ w)\right]$$
$$= \iint_{0}^{\psi(r,w)} f\ (\delta,\ w)\ d\delta\ dw) \quad (24)$$

donde $\psi(.\ )$ es la inversa para δ, es decir la solución a $r^2 = Te^*\ (\delta,\ w)$ y donde hemos supuesto que la probabilidad de que 'q' esté fuera de este espacio puede ser desechada. Bajo ciertas condiciones, po dremos obtener una aproximación a la densidad de (δ, w), $f^{k}(\delta, w)$. También es posible bajo otras condiciones aproximar $\psi(\gamma, w)$ por un polinomio $Q(\gamma, w)$ de modo que $\psi(\gamma, w) \simeq Q(v, w)$ [7]. Entonces puede escribirse

$$(24) \quad \simeq \int\int_{0}^{Q(\gamma,w)} f^{(k}(\delta, w)\, d\delta, dw$$

$$= \int h\left[Q(\gamma, w), w\right] dw$$

Es decir, integramos primero respecto a 'δ', y obtenemos una expresión que es integrada finalmente con respecto a las variables 'marginales' w, para obtener la aproximación final. La dificultad estriba por supuesto en probar que en cada paso el término desechado es del orden de magnitud requerido en T.

Una vez que la validez del teorema ha sido probada es más conveniente presentar la expansión de un modo alternativo que facilite el álgebra. Concretamente, la idea aquí es obtener la función característica aproximada de $Te(q)$ 'expandiendo todo' por Taylor, e integrar término a término. Finalmente, invirtiendo esta aproximación obtendremos una expresión explícita para la aproximación a la probabilidad finita que buscamos.

Más concretamente, consideremos la función característica de $Te(q)$ tal como ha sido expresada en (23)

$$(25) \quad \psi_{Te}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is\, Te(q)} f(q)\, dq$$

La expansión ha sido obtenida hasta un error $O(T^{-3/2})$ por razones que luego serán patentes. Bajo las condiciones del T^{ma}, puede escribirse

(26) $Te(\delta, Z) = \delta^2 + R_1(\delta, w)/\sqrt{T} + R_2(\delta, w)/T + O(T^{-3/2})$

donde R_1, y R_2 son términos que dependen de las derivadas de $e(.)$ hasta el orden cuarto, y están evaluadas en $E\ q = \mu$

Por otra parte, aplicando la idea descrita al principio se obtiene con facilidad, la aproximación a la densidad de $X = \sqrt{T}\ L(q-\mu)$ (recordando $X \underset{A}{\sim} N(0, I)$).

(27) $f\ (X) = \alpha(X)\ \{1 + \beta_1(X)/\sqrt{T} + \beta_2(X)/T\} + O(T^{-3/2})$

y donde $\alpha(X) - N(O,I)$.

Como (δ, w) es una simple transformación de X, la aproximación a su densidad es sencilla de obtener. La expansión del exponente no entraña ahora ninguna dificultad especial. Finalmente, se desechan todos los términos cruzados de orden inferior a $O(T^{-3/2})$ antes de integrar la expansión.

La expansión en sí misma es muy complicada y costosa de obtener. Al final, obtenemos una expresión que es función de las derivadas de (Te) hasta el orden cuarto, y de los cumulantes, también hasta orden cuarto, de 'q'. Hay problemas adicionales en la obtención de una matriz Θ tal que

(28) $\frac{1}{2}\ C_{qq'} - \Theta = O(1/\sqrt{T})$

y que $(\Omega^{1/2}\Theta\ \Omega^{1/2})$ sea idempotente y de rango h. Esta condición, en el caso visto arriba y en bastantes situaciones reales, se va a cumplir con igualdad. Pero, en general, es un problema el obtener esas derivadas.

Finalmente, la expresión para la aproximación es de la forma

$$(29)\quad P\left[Te\ (q) \leq r^2\right] = \Phi_{\delta^2}(r^2) + f_{\delta^2}(r^2) * W(\gamma) + O(T^{-3/2})$$

$$W(\gamma) = \Lambda\ (\gamma)\ /\ \sqrt{T} + \beta\ (r)\ /\ T$$

$$\Lambda\ (\gamma) = \lambda_1\ \gamma^{-1} + \lambda_2\ \gamma$$

$$\beta\ (r) = \sum_{i=1}^{5} b_i\ \gamma^{(2i-5)}$$

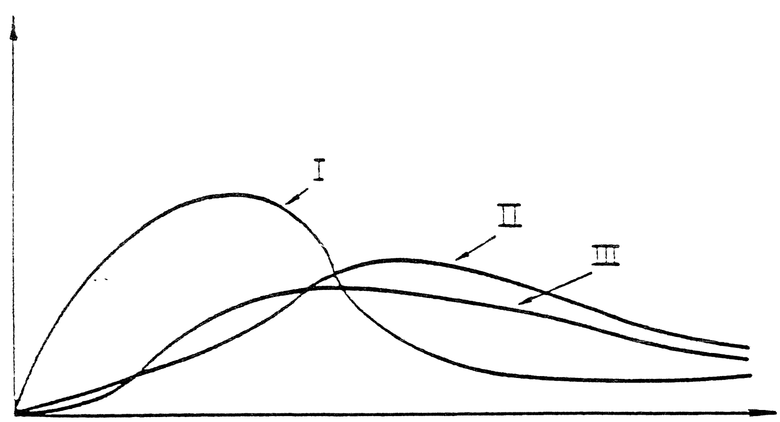
donde Φ_{δ^2} (.) es la función de distribución de una χ^2_h, y f_{δ^2} (.) la correspondiente función de densidad. Los coeficientes (λ_i, b_i) dependen de las derivadas y cumulantes mencionados más arriba. Existen transformaciones de esta aproximación diseñados para asegurar un comportamiento mejor en muestras finitas, pero la expresión (29) es por así decirlo la 'generadora de aproximaciones' y por esta la clave. La aproximación ha sido obtenida hasta un orden $O(T^{-3/2})$ por dos razones: primero, obtener un orden T^{-2} requería evaluar términos demasiado complicados, y segundo, el término Λ (γ) depende de $e(\mu)$, e_q y $\frac{1}{2}\ e_{qq} - \Theta$, pero estos términos son con frecuencia nulos de modo que el error de las aproximaciones asintóticas no es de orden ($1/\sqrt{T}$) sino de orden ($1/T$) en muchas ocasiones.

Las derivadas del criterio pueden ser evaluadas numéricamente lo que plantea otra serie de interesantes problemas, de tipo numérico, que están discutidos en [I]. La aproximación puede ser utilizada con parámetros estimados, obteniéndose un error $O\ (T^{-3/2})$ si $\Lambda(\gamma) = 0$. También puede utilizarse sencillamente para estimar el intervalo correspondiente a una probabilidad dada, manteniéndose el orden de error, $T^{-3/2}$.

La expansión obtenida en [I] ha sido desarrollada bajo una serie de supuestos de derivabilidad en la función Te (.) que no son restrictivos. El más importante es que el número de momentos no dependa de T (no cumplido por procesos de medias móviles). El requerimiento básico para las variables 'q', es que su función de densidad sea aproximable por una expansión de Edgeworth y que sea asintóticamente normal, consecuentemente. Esta condición parece bastante general y en principio no requiere la normalidad del componente de error en el modelo original (10).

De todas formas, la investigación empírica realizada se ha llevado a cabo en modelos autorregresivos (uni y biecuacionales) comprobando restricciones lineales y no lineales, y suponiendo que los errores del modelo son normales, con lo que se pueden obtener expresiones algebraicas explícitas para los cumulantes de 'q' hasta el orden deseado.

Una de las conclusiones empíricas obtenidas sistemáticamente en los experimentos de Monte Carlo es que la aproximación asintótica tiene unas colas demasiado delgadas. La forma general de las distribuciones parece ser,



I - asintótica

II - finita (cierta)

III - aproximación a la finita.

Este resultado, para T alto también puede derivarse teóricamente requiriendo $b_5 > 0$ (ver (29)). Esta condición por otra parte se requiere para la validez misma de la aproximación, y empíricamente siempre se ha cumplido.

El problema entonces es que los 'tests' de hipótesis se llevan a cabo en las colas. Una pequeña diferencia de probabilidad, supere una variación porcentual de a veces el 100 % en el intervalo de confianza.

Las aproximaciones a la verdadera distribución derivadas en [I] por otra parte, cometen errores mucho menores y en muchos casos prácticamente nulo.

III. Conclusión

La aproximación obtenida, es muy ajustada a la distribución finita, de acuerdo a todas las pruebas realizadas. Además, es de aplicabilidad bastante general, pues la restricción de normalidad en los errores puede ser fácilmente relajada. Por otra parte, en aplicaciones prácticas suele ser más importante determinar el orden de la correlación serial que su forma. Es decir, que un MA(1) puede ser aproximado por un AR(1) a no ser que la raiz sea cercana al círculo unidad. La implicación de este hecho es que las aproximaciones aquí resumidas, pueden ser aplicables también en estos casos.

Excepto en casos sencillos, es difícil obtener resultados analíticos, de la comparación de las expansiones correspondientes a diferentes criterios con igual distribución asintótica. Sin embargo, en algunos casos de relevancia práctica la comparación puede ser llevada a cabo, y el autor está actualmente trabajando en ello. La aproximación puede ser calculada sin dificultad para criterios generales, mediante un programa escrito como parte de esta investigación, y que pronto estará disponible para su uso público. El programa no es excesivamente caro en términos de tiempo de ordenador, y actualmente J.D. Sargan está trabajando en la simplificación de las partes más costosas de la evaluación de las aproximaciones de Edgeworth en general.

En resumen, es probable que en un plazo relativamente corto, las aproximaciones a las distribuciones finitas de este tipo, pasen a estar disponibles para su uso generalizado en cualquier tipo de problemas.

R E F E R E N C I A S

MAULEON, I. "Approximations to the finite sample distributions of econometric chi-squared criteria". London School of Economics. Tesis Doctoral no publicada. (1983).

PHILLIPS,P.C.B. "A general theorem in the theory of asymptotic expansions as approximations to the finite sample distributions of econometric estimators". Económetrica (1977).

SARGAN, J.D. "Gram-Charlier approximations applied to t-ratios of k-class estimators". Económetrica (1975).

SARGAN, J.D. "Econometric estimators and the Edgeworth approximation". Económetrica (1976).

SARGAN, J.D. and, SATCHELL, S. "The validity of multivariate Edgeworth expansions for autoregressive models". London School of Economics, workshop in econometric methodology, mimeo, (1979).

SARGAN, J.D. and TSE, Y.K. "Edgeworth approximations to the distributions of various test statistics" London School of Economics. Econometrics Programm Discussion Paper, n° A22 (1979).

SARGAN, J.D. "Some approximations to the distributions of econometric criteria which are asymptotically distributed as chi-squared". Económetrica (1980).

STUART, A. and KENDALL, M. "The advanced theory of statistics". Griffin, London (1969)

[9] TSE, Y.K. "Edgeworth approximations to the finite sample distribution of econometric estimators and test statistics". Tesis doctoral no publicada. London School of Economics (1981).

[10] WALLACE, D.L. "Asymptotic approximations to distributions". Annals of Mathematical Statistics pg. 635-654. (1958).

DOCUMENTOS DE TRABAJO:

7801 **Vicente Poveda y Ricardo Sanz**: Análisis de regresión: algunas consideraciones útiles para el trabajo empírico (*).
7802 **Julio Rodríguez López**: El PIB trimestral de España, 1958-1975. Avance de cifras y comentarios (*). (Publicadas nuevas versiones en Documentos de Trabajo núms. 8211 y 8301).
7803 **Antoni Espasa**: El paro registrado no agrícola 1964-1976: un ejercicio de análisis estadístico univariante de series económicas (*). (Publicado en Estudios Económicos n.º 15).
7804 **Pedro Martínez Méndez y Raimundo Poveda Anadón**: Propuestas para una reforma del sistema financiero.
7805 **Gonzalo Gil**: Política monetaria y sistema financiero. Respuestas al cuestionario de la CEE sobre el sistema financiero español (*). Reeditado con el número 8001.
7806 **Ricardo Sanz**: Modelización del índice de producción industrial y su relación con el consumo de energía eléctrica.
7807 **Luis Angel Rojo y Gonzalo Gil**: España y la CEE. Aspectos monetarios y financieros (*).
7901 **Antoni Espasa**: Modelos ARIMA univariantes, con análisis de intervención para las series de agregados monetarios (saldos medios mensuales) M_3 y M_2.
7902 **Ricardo Sanz**: Comportamiento del público ante el efectivo (*).
7903 **Nicolás Sánchez-Albornoz**: Los precios del vino en España, 1861-1890. Volumen I: Crítica de la fuente.
7904 **Nicolás Sánchez-Albornoz**: Los precios del vino en España, 1861-1890. Volumen II: Series provinciales.
7905 **Antoni Espasa**: Un modelo diario para la serie de depósitos en la Banca: primeros resultados y estimación de los efectos de las huelgas de febrero de 1979.
7906 **Agustín Maravall**: Sobre la identificación de series temporales multivariantes.
7907 **Pedro Martínez Méndez**: Los tipos de interés del Mercado Interbancario.
7908 **Traducción de E. Giménez-Arnau**: Board of Governors of the Federal Reserve System-Regulations AA–D–K–L–N–O–Q (*).
7909 **Agustín Maravall**: Effects of alternative seasonal adjustment procedures on monetary policy.
8001 **Gonzalo Gil**: Política monetaria y sistema financiero. Respuestas al cuestionario de la CEE sobre el sistema financiero español (*).
8002 **Traducción de E. Giménez-Arnau**: Empresas propietarias del Banco. Bank Holding Company Act-Regulation «Y» (*).
8003 **David A. Pierce, Darrel W. Parke, and William P. Cleveland, Federal Reserve Board and Agustín Maravall, Bank of Spain**: Uncertainty in the monetary aggregates: Sources, measurement and policy effects.
8004 **Gonzalo Gil**: Sistema financiero español (*). (Publicada una versión actualizada en Estudios Económicos n.º 29).
8005 **Pedro Martínez Méndez**: Monetary control by control of the monetary base: The Spanish experience (la versión al español se ha publicado como Estudio Económico n.º 20).
8101 **Agustín Maravall, Bank of Spain and David A. Pierce, Federal Reserve Board**: Errors in preliminary money stock data and monetary aggregate targeting.
8102 **Antoni Espasa**: La estimación de los componentes tendencial y cíclico de los indicadores económicos.
8103 **Agustín Maravall**: Factores estacionales de los componentes de M_3. Proyecciones para 1981 y revisiones, 1977-1980.
8104 **Servicio de Estudios**: Normas relativas a las operaciones bancarias internacionales en España.
8105 **Antoni Espasa**: Comentarios a la modelización univariante de un conjunto de series de la economía española.
8201 **Antoni Espasa**: El comportamiento de series económicas: Movimientos atípicos y relaciones a corto y largo plazo.
8202 **Pedro Martínez Méndez e Ignacio Garrido**: Rendimientos y costes financieros en el Mercado Bursátil de Letras.
8203 **José Manuel Olarra y Pedro Martínez Méndez**: La Deuda Pública y la Ley General Presupuestaria.

8204 **Agustín Maravall**: On the political economy of seasonal adjustment and the use of univariate time-series methods.
8205 **Agustín Maravall**: An application of nonlinear time series forecasting.
8206 **Ricardo Sanz**: Evaluación del impacto inflacionista de las alzas salariales sobre la economía española en base a las tablas input-output.
8207 **Ricardo Sanz y Julio Segura**: Requerimientos energéticos y efectos del alza del precio del petróleo en la economía española.
8208 **Ricardo Sanz**: Elasticidades de los precios españoles ante alzas de diferentes inputs.
8209 **Juan José Dolado**: Equivalencia de los tests del multiplicador de Lagrange y F de exclusión de parámetros en el caso de contrastación de perturbaciones heterocedásticas.
8210 **Ricardo Sanz**: Desagregación temporal de series económicas (*).
8211 **Julio Rodríguez y Ricardo Sanz**: Trimestralización del producto interior bruto por ramas de actividad. (Véase Documento de Trabajo n.° 8301).
8212 **Servicio de Estudios. Estadística**: Mercado de valores: Administraciones Públicas. Series históricas (1962-1981).
8213 **Antoni Espasa**: Una estimación de los cambios en la tendencia del PIB no agrícola, 1964-1981.
8214 **Antoni Espasa**: Problemas y enfoques en la predicción de los tipos de interés.
8215 **Juan José Dolado**: Modelización de la demanda de efectivo en España (1967-1980).
8216 **Juan José Dolado**: Contrastación de hipótesis no anidadas en el caso de la demanda de dinero en España.
8301 **Ricardo Sanz**: Trimestralización del PIB por ramas de actividad series revisadas
8302 **Cuestionario OCDE. Servicio de Estudios. Estadística.** Cuadro de flujos financieros de la economía española (1971-1981) (*).
8303 **José María Bonilla Herrera** y **Juan José Camio de Allo**: El comercio mundial y el comercio exterior de España en el período 1970-1981: Algunos rasgos básicos.
8304 **Eloísa Ortega**: Indice de precios al consumo e índice de precios percibidos.
8305 **Servicio de Estudios. Estadística**: Mercado de Valores: Instituciones financieras. Renta fija. Series históricas (1962-1982).
8306 **Antoni Espasa**: Deterministic and stochastic seasonality: an univariate study of the Spanish Industrial Production Index.
8307 **Agustín Maravall**: Identificación de modelos dinámicos con errores en las variables.
8308 **Agustín Maravall, Bank of Spain and David A. Pierce, Federal Reserve Board**: The transmission of data noise into policy noise in monetary control.
8309 **Agustín Maravall**: Depresión, euforia y el tratamiento de series maníaco-depresivas: el caso de las exportaciones españolas.
8310 **Antoni Espasa**: An econometric study of a monthly indicator of economic activity.
8311 **Juan José Dolado**: Neutralidad monetaria y expectativas racionales: Alguna evidencia en el caso de España.
8312 **Ricardo Sanz**: Análisis cíclicos. Aplicación al ciclo industrial español.
8313 **Ricardo Sanz**: Temporal disaggregation methods of economic time series.
8314 **Ramón Galián Jiménez**: La función de autocorrelación extendida: Su utilización en la construcción de modelos para series temporales económicas.
8401 **Antoni Espasa y María Luisa Rojo**: La descomposición del indicador mensual de cartera de pedidos en función de sus variantes explicativas.
8402 **Antoni Espasa**: A quantitative study of the rate of change in Spanish employment.
8403 **Servicio de Producción y Demanda Interna**: Trimestralización del PIB por ramas de actividad, 1975-1982.
8404 **Agustín Maravall**: Notas sobre la extracción de una señal en un modelo ARIMA.
8405 **Agustín Maravall**: Análisis de las series de comercio exterior –I–.
8406 **Ignacio Mauleón**: Aproximaciones a la distribución finita de criterios Ji- cuadrado: una nota introductoria.

* *Las publicaciones señaladas con un asterisco se encuentran agotadas.*

Información: Banco de España, Servicio de Publicaciones. Alcalá, 50. Madrid-14.