EL AJUSTE ESTACIONAL EN SERIES ECONOMICAS

Antoni Espasa (*)

(*) Estoy agradecido a Agustín Maravall, Iñaki Mauleón, Gregorio Gómez y Alonso Ojeda por sus comentarios a una primera versión de este trabajo y a Coral Aldea por la labor mecanográfica.

Banco de España. Servicio de Estudios
Documento de Trabajo n.º 8410

ISBN: 84-505-0031-1

Depósito legal: M. 18878 - 1984

(Reimpresión 1990)

Talleres Gráficos del Banco de España

I N D I C E

0. Introducción-Resumen.

En este trabajo se presentan, sección 2, los modelos ARIMA como un esquema general para realizar el análisis lineal univariante de series temporales. Este esquema se amplia posteriormente, sección 4, con los denominados modelos ARIMA con INTERVENCION para poder explicar posibles rupturas o anomalías en la evolución de las series económicas. En ellas su evolución estacional es un aspecto de interés, ya que tiene un carácter sistemático, aunque no totalmente regular, que permite que pueda ser estudiado relativamente bien y eliminado, si se desea, de la serie original.

Las características estacionales de los fenómenos económicos hacen que la dependencia temporal en las muestras observadas se alargue mucho. No obstante, los modelos ARIMA multiplicativos, sección 2, son capaces de incorporar tal dependencia con pocos parámetros, por lo que constituyen, ampliados con el análisis de intervención, un elemento adecuado para el estudio de dichos fenómenos.

Para la eliminación de la estructura estacional en las series económicas el método X-11 es el más utilizado universalmente y se basa en considerar a una serie (o a su transformación logarítmica) como la suma de tres componentes estocásticos: tendencia-ciclo, estacional y residual. Con ello, el proceso de ajuste estacional de una serie es un proceso de estimación de dichos componentes, para luego extraer de la serie original (o su transformación logarítmica) el componente estacional.

El procedimiento X-11 se fue diseñando históricamente de forma empírica y con independencia de modelos teóricos que explicasen la generación de las series temporales. Los pasos operativos de este procedimiento se explican en la primera parte de la sección 3, pero su robustez y limitaciones en la aplicación a series de muy distintas fuentes se entiende al conocer la relación de este método con los modelos ARIMA con INTERVENCION, que se explica en la segunda parte de dicha sección.

El hallazgo (Cleveland (1972)) de esta relación entre el esquema más general, actualmente disponible, para la explicación de series temporales, y el procedimiento empírico más utilizado para su ajuste estacional, desencadenó una serie de investigaciones sobre el tema de descomposición de una serie temporal, en los tres componentes mencionados, a partir del modelo ARIMA con INTERVENCION específico para la serie en cuestión. A la discusión de estos procedimientos, que empiezan a estar ya en forma operativa y sobre los que existen programas de ordenador (véase Burman (1980) y Hillmer y Tiao (1982)) para su aplicación, se dedica la sección 4. Se les denomina procedimientos de ajuste estacional basados en modelos y han puesto de manifiesto la necesidad de imponer restricciones sobre la naturaleza de los componentes para poder llegar a una descomposición única. Cuando una serie económica viene generada por alguno de los denominados modelos ARIMA "básicos" (véase sección 4) el acuerdo sobre las restricciones a imponer es bastante general y estos métodos son, en tales casos, de aplicación automática sin requerir personal especializado. Sin embargo, cuando la serie económica a tratar viene generada por un modelo ARIMA bastante distinto a los "modelos básicos", las restricciones a imponer pueden ser discutibles y es importante que el ajuste estacional lo realice personal experto capaz de enjuiciar si las características de los componentes que se obtienen bajo ciertas restricciones son compatibles con los objetivos que debe cumplir la desestacionalización de la serie en estudio. En esta situación es incluso posible que todos los distintos conjuntos de restricciones ensayados lleven a ajustes estacionales con problemas. Por todo ello estos métodos basados en modelos están todavía en fase de desarrollo para acumular experiencia sobre los mismos y poder evaluar de forma realista sus ventajas, que por otra parte son indiscutibles desde un punto de vista teórico.

Si el conocimiento del modelo ARIMA con INTERVENCION que genera una serie económica no se utiliza para basar el ajuste estacional en él, se puede utilizar para mejorar el procedimiento X-11. Esto ha llevado a proponer el método, más recomendable hoy en día, X-11-ARIMA. La sección 5 se dedica a discutir como utilizar la información del modelo en la aplicación del procedimiento X-11-ARIMA.

El Concepto de Estacionalidad y enfoques para el tratamiento de la misma.

La "estacionalidad es un término muy utilizado pero del que raramente se da una definición precisa. Como señala Nerlove (1964), con dicho término se quiere hacer referencia a los movimientos "casi regulares" que se observan en las series mensuales (*) dentro de cada año. Así, por ejemplo, nuestro índice de producción industrial muestra un movimiento intra-anual que va de un descenso en su nivel durante el mes de agosto, a un subsiguiente aumento en el otoño; el consumo de energía eléctrica muestra una osiclación anual que tiene su punto máximo en los meses de invierno y su mínimo en los de verano; el efectivo en manos del público muestra dos picos dentro del año en los meses de julio y diciembre; etc... Este tipo de oscilaciones intra-anuales se da, en mayor o menor grado, en gran parte de las series económicas y son debidas principalmente, a las estaciones climáticas, fiestas religiosas, costumbres institucionales, etc. No obstante, estas oscilaciones no son perfectamente regulares, pues las condiciones climáticas no se repiten exactamente de año a año, la fecha de ciertas fiestas y el número de días festivos dentro de un mes varían, las costumbres evolucionan, etc. Ahora bien, como observa Nerlove (1964), es precisamente esta cercanía a la regularidad sin llegar a ser perfecta, lo que hace difícil la definición de estacionalidad, ya que si tales oscilaciones intra-anuales fueran irregulares la estacionalidad no aparecería y si fueran perfectamente regulares se definiría como dichas regularidades.

(*) La estacionalidad va referida a toda serie con período de observación inferior al año: trimestre, semana, día... Por ser las series mensuales las más utilizadas, nos referiremos a ellas, pero la exposición del tema es igualmente válida para cualquier otra serie estacional.

Dado que, como hemos visto, la estacionalidad hace referencia a movimiento cíclicos intra-anuales, Nerlove (1964) recurre al concepto del espectro para definir la estacionalidad como "aquella característica de una serie temporal que ocasiona unos picos en el espectro en las frecuencias estacionales" (pág. 262)(*). Esta definición por estar referida al espectro -concepto con una divulgación limitada entre los economistas- no se utiliza de forma generalizada. Por ello, Thomas y Wallis (1971) definen la estacionalidad -quizás con más imprecisión- como "aquellos movimientos intranuales y sistemáticos, aunque no necesariamente regulares, en las series temporales económicas que con frecuencia vienen causados por fenómenos no económicos, tales como los cambios climáticos y la regularidad de las fechas religiosas".

Habiendo centrado, más o menos, el concepto de estacionalidad podemos ocuparnos de métodos para su tratamiento. Advertimos que éste será distinto según el objetivo del estudio en cuestión. Así, en tareas de construcción de modelos econométricos, la variación estacional de las series ha de tenerse en cuenta y ha de ser explicada por el modelo en su conjunto, pero el estimar dicho componente estacional separadamente del resto de los componentes de la serie no es un objetivo (**). Conviene señalar también que en la especificación de modelos econométricos

---

(*) En estas circunstancias, el espectro teórico en dichas frecuencias será, generalmente, infinito. Por el contrario el espectro muestral, estimado directamente a partir de los datos observados, aunque reflejará picos en las frecuencias estacionales tendrá valores finitos, por lo que en tales casos se le suele denominar pseudoespectro.

(**) Por ello, en la especificación del modelo se intentará introducir todos los factores económicos y no económicos que influyen en la determinación de las variables dependientes, pero no habrá preocupación alguna por saber en qué medida un factor es causa de la variación estacional de las variables endógenas. Así, la estacionalidad de éstas vendrá explicada por un conjunto de factores (variables artificiales, variables económicas, variables endógenas retardadas) que a su vez pueden contribuir a explicar otros aspectos como el tendencial, cíclico, etc. sin ser posible, en general, el separar en qué medida explican uno u otros.

debe utilizarse, normalmente, variables originales y rehusar variables que han sido previamente desestacionalizadas, ya que éste último procedimiento puede distorsionar la relación de las variables en el modelo (*).

El problema del tratamiento estacional como objetivo en sí mismo aparece cuando se quiere extraer de una serie su variación estacional, para obtener así una evolución de la misma en la que se aprecie más claramente los movimientos tendenciales y cíclicos. En el resto de este trabajo nos referimos únicamente a este tipo de tratamiento. Señalemos, sin embargo, que toda la problemática de la desestacionalización que veremos a continuación sólo es de importancia cuando la estimación del componente estacional es el objetivo primordial, pero cuando el objetivo sea la construcción de modelos econométricos o la predicción económica dicha problemática no se presenta. En estos casos habrá que tener en cuenta la estacionalidad, pero su tratamiento será en función de que aquélla no distorsione las estimaciones estructurales o las predicciones. *Este modo de proceder, de tratar la estacionalidad de forma específica según el problema que se quiere abordar, es muy recomendable, mientras que la actitud de desestacionalizar las series económicas previamente a cualquier tipo de estudio y con independencia del contexto del mismo puede ser peligrosa.*

En la extracción del componente estacional (S_t) de una serie (X_t) para obtener así una serie desestacionalizada (X_t-S_t ó X_t/S_t) se han seguido principalmente procedimientos empíricos de carácter univariante. En ellos se concibe a la serie temporal como la suma de dos componentes, el estacional y no estacional ($X_t^{(a)}$); y este último se descompone a su vez en un componente de tendencia-ciclo (TC_t) y en un componente de irregular (e_t).

Así pues

$$X_t = X_t^{(a)} + S_t = TC_t + S_t + e_t. \qquad (1.1)$$

(*) Sobre este punto véase Wallis (1974). No obstante, conviene advertir que en el caso, improbable, de que la estacionalidad de todas las variables de un modelo sean de carácter puramente determinístico, es indiferente, para la estimación de los parámetros estructurales, estimar el modelo sobre variables originales o ajustadas de estacionalidad, (véase, por ejemplo, Espasa (1971)).

Otro esquema empleado es el multiplicativo donde:

$$X_t = X_t^{(a)} S_t = TC_t S_t e_t. \qquad (1.2)$$

Para las series que muestran un crecimiento exponencial el esquema multiplicativo será en principio más apropiado. Ahora bien, el modelo aditivo se puede derivar del multiplicativo tomando logaritmos. Así, de (1.2) tenemos:

$$X_t^* = TC_t^* + S_t^* + e_t^* , \qquad (1.3)$$

donde el asterisco indica logaritmo de la variable original. En esta sección nos referiremos al modelo aditivo, bien entendido que en el caso de que el modelo requerido sea el multiplicativo las varibles vendrán en logaritmos.

Los métodos de ajuste estacional se pueden clasificar en dos grandes categorías:

- Métodos de regresión y
- Métodos de medias móviles

El primer método se ha desarrollado, principalmente, para casos en que la estacionalidad es determinística, es decir, puede predecirse sin error a partir de la estacionalidad anterior. Sin embargo, el segundo contempla, especialmente, una estacionalidad estocástica, es decir, capaz de ser representada por un proceso estocástico y en consecuencia no es predecible sin error.

Otra clasificación de la estacionalidad es en fija y cambiante. En el primer caso, el factor estacional en un determinado mes no varía de año a año, pero en el segundo caso sí. La estacionalidad fija es necesariamente determinística, pero los métodos de regresión pueden explicar también una estacionalidad cambiante de tipo determinístico (Véase, por ejemplo, Espasa (1971), págs. 57 y 58).

La mayor parte de los métodos de ajuste estacional utilizados en la práctica son univariantes, es decir, tratan el ajuste de una serie independientemente de otras. La consideración multivariente sería más adecuada para las series económicas, pues los fenómenos económicos aparecen interrelacionados entre sí. Sin embargo, las aplicaciones en el campo multivariante son escasas, ya que su complejidad aumenta considerablemente el coste de su realización. Para un enfoque multivariante remitimos al lector a Box et al. (1978), sección cuarta. En este trabajo nos referiremos únicamente a un contexto univariante.

Tanto los métodos de regresión como los de medias móviles no son fruto de una teoría sobre la causa de la estacionalidad, sino que, más bien, han tenido un desarrollo empírico, en el sentido de que la experiencia que se ha ido adquiriendo en el tratamiento de las series temporales es la que ha orientado la evolución y perfeccionamiento de los métodos de ajuste. Box et al. (1978) hacen especial hincapié en la necesidad de conjugar el acercamiento empírico con el teórico o, en su terminología, con el basado en modelos. En efecto, un enfoque teórico, para que sea válido, ha de postular una clase o tipo de modelos que se acerquen a la realidad y ese tipo de modelos se puede obtener del análisis empírico, escogiendo aquéllos que hayan mostrado tener un comportamiento satisfactorio. Con ello, las ideas contenidas en el enfoque empírico son criticadas y generalizadas por la teoría, con lo que ésta pasa a ofrecer al investigador empírico un instrumento más útil que el inicial.

Esta conjunción de teoría y práctica ha llevado a la proposición de los modelos ARIMA como un tipo de modelos bastante adecuados para las series temporales que se observan en Economía. Antes de comentar algunos métodos concretos de ajuste estacional, dediquemos el epígrafe siguiente a introducir el modelo ARIMA estacional multiplicativo.

El modelo ARIMA estacional multiplicativo.

El modelo ARIMA general se puede representar de la forma:

$$(1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p)\Delta(L)X_t = (1 - \theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q)a_t, \qquad (2.1)$$

donde el polimonio $\Delta(L)$ es un operador de diferencias del tipo:

$$\Delta(L) = \prod_{j=1}^{D} \Delta_{k_j}^{d_j}, \qquad (2.2)$$

en el que $\Delta_{k_j} = (1 - L^{k_j})$ y L es el operador de retardos.

Utilizando

$$\Delta(L)\ X_t = W_t, \qquad (2.3)$$

(2.1) se puede escribir de la siguiente forma:

$$(1 - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p)W_t = (1 - \theta_1 L - \ldots - \theta_q L^q)a_t. \qquad (2.4)$$

Si $\Delta(L) = 1$, (2.1) representa un proceso estacionario ARMA (p,q)(*). Si $\Delta(L) \neq 1$, al proceso representado en (2.1) se le denomina "integrado, autorregresivo y de medias móviles"(ARIMA)(**). Obsérvese que si X_t viene generada por un proceso ARIMA (p,q), W_t viene generada por un proceso estacionario ARMA (p,q). Es decir, sucesivas diferenciaciones de las variables económicas (X_t) no estacionarias, las convierten generalmente en variables estacionarias (W_t).

Modelos del tipo (2.1) son suficientemente generales para representar series económicas con variación estacional. En particular el método de predicción Holt-Winters para series con estacionalidad aditiva es óptimo si la serie viene generada por (véase Granger y Newbold (1977), sección 5.3):

$$(1-L)^2(1-L^s)X_t = (1-\theta_1 L + \theta_2 L^2 - \theta_s L^s - \theta_{s+1} L^{s+1} - \theta_{s+2} L^{s+2})a_t, \qquad (2.5)$$

(*) Estamos suponiendo que las raíces del polinomio $(1-\phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p)$ están fuera del círculo unitario.

(**) En la designación del modelo ARIMA estamos omitiendo los órdenes dj, aunque éstos sean distintos de cero.

donde s es el retardo estacional, que para series mensuales es normalmente doce.

No obstante, formas especiales de (2.1) que tienen un número pequeño de parámetros se han manifestado muy útiles para representar las series económicas estacionales. En efecto, en dichas series las observaciones de un mes concreto estarán relacionadas entre sí de un año a otro. Si por el momento suponemos que esa es la única relación entre las observaciones de la serie, es decir sucesivos valores de la misma están relacionados si y solamente si distan uno de otro un número K.12 (K=1,2,..) de meses, la serie vendría generada por una proceso ARMA de multiplicidad estacional pura del tipo (*):

$$(1-\Phi_1 L^{12}-\Phi_2 L^{24}-\ldots-\Phi_{p_1} L^{p_1 12})W_t = (1-\Theta_1 L^{12}-\Theta_2 L^{24}-\ldots$$
$$-\Theta_{q_1} L^{q_1 12})e_t. \qquad (2.6)$$

En general, la serie no será de multiplicidad estacional pura sino que, observaciones de distintos meses estarán también relacionadas entre sí. En dicho caso los residuos (e_t) de (2.6) se mostrarán dependientes de un mes a otro y si suponemos que se pueden relacionar mediante el modelo

$$(1-\phi_1 L-\ldots-\phi_{p_2} L^{p_2})e_t = (1-\theta_1 L-\ldots-\theta_{q_2} L^{q_2})a_t, \qquad (2.7)$$

y sustituímos (2.7) en (2.6) y utilizamos (2.1) obtenemos el modelo ARIMA multiplicativo estacional:

$$(1-\Phi_1 L^{12}-\ldots-\Phi_{p_1} L^{p_1 12})(1-\phi_1 L-\ldots-\phi_{p_2} L^{p_2})\Delta(L)X_t =$$
$$= (1-\Theta_1 L^{12}-\ldots-\Theta_{q_1} L^{q_1 12})(1-\theta_1 L-\ldots-\theta_{q_2} L^{q_2})a_t. \qquad (2.8)$$

(*) Estamos suponiendo que previamente se ha aplicado (2.3) para convertir la serie en estacionaria, y que la dependencia estacional es la misma para todos los meses del año. Esta última condición es necesaria para que se cumpla la hipótesis de estacionariedad sobre la variable W_t. Recientemente han aparecido en la literatura sobre Series Temporales los modelos ARIMA periódicos para representar fenómenos que no cumplen la mencionada condición de estacionariedad en la dependencia estacional (véase Tiao y Grupe (1980). Un comentario sobre el ajuste estacional en estos casos se realiza en la sección 5.

Este modelo es un caso particular de (2.1) que en vez de tener 12 p_1+p_2 parámetros autorregresivos y 12 q_1+q_2 parámetros de medias móviles sólo tiene (p_1+p_2) y (q_1+q_2) respectivamente.

En esta modelización multiplicativa la serie e_t es una transformación de W_t que elimina la dependencia de multiplicidad estacional, y ε_t definida como

$$\Delta^{(1)}(L)\varepsilon_t = e_t \,, \tag{2.9}$$

donde $\Delta^{(1)}(L)$ recoge las diferencias regulares contenidas en $\Delta(L)$, una transformación de X_t en la que se ha eliminado la dependencia de multiplicidad estacional.

Un modelo del tipo (2.8) que se muestra útil para describir algunas series económicas es

$$(1-L)\ (1-L^s)\ X_t = (1-\theta_1 L)(1-\Theta_1 L^s)\ a_t \,. \tag{2.10}$$

Si la serie contiene además oscilaciones cíclicas con período medio de varios años un modelo útil puede ser el siguiente:

$$(1-\Phi_1 L^s-\Phi_2 L^{2s})\ (1-L)(1-L^s)\ X_t = (1-\theta_1 L)(1-\Theta_1 L^s)\ a_t \,. \tag{2.11}$$

En (2.10) las únicas características cíclicas son de periodicidad estacional, mientras que en (2.11) si el polinomio $(1-\Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s})$ tiene raíces complejas tendrá características cíclicas de periodicidad superior a dos años. Normalmente estas raíces están fuera del círculo unitario por lo que el espectro teórico tendra picos, en las frecuencias de las raíces complejas, pero con valores finitos. Las oscilaciones cíclicas de periodicidad superior a la anual se pueden captar también con el polinomio $(1-\Theta_1 L^{12}-\ldots-\Theta_{q_1} L^{q_1 12})$ que se ha incluído en la definición general (2.8) del modelo multiplicativo, pero en tal caso el número de parámetros requeridos es normalmente superior a dos. El polinomio autorregresivo regular $(1-\phi_1 L-\ldots-\phi_{p_2} L^{p_2})$ también podría captar las oscilaciones cíclicas mencionadas pero con un p_2 alto, posiblemente superior a s. Lo mismo cabe decir sobre el polinomio de medias móviles regular $(1-\theta_1 L-\ldots-\theta_{q_2} L^{q_2})$.

Tenemos pues que la forma más parsimoniosa en cuanto al número de parámetros de captar oscilaciones cíclicas es con el operador $(1-\Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s})$ incluido en (2.11). En realidad los exponentes de L en dicho operador pudieran ser múltiplos de h, siendo h mayor que uno pero no necesariamente s. Este es un aspecto muy poco estudiado en la literatura de Series Temporales debido, en parte, a que el desarrollo teórico de estos modelos ha sido realizado mayormente por estadísticos ligados a otras ciencias más que a la Economía, en la que el problema de los cíclos se plantea con características muy específicas.

3 El método de ajuste estacional X-11 y su relación con el modelo ARIMA estacional multiplicativo.

Obteniendo un modelo (2.8) suficientemente general y capaz de explicar las series económicas como realizaciones de procesos estocásticos, conviene relacionar los métodos de ajuste estacional por medias móviles, y en particular el método x-11 del "Bureau of the Census" (véase Shiskin et.al. (1967)), con este modelo.

Aparte de ciertos detalles como la corrección de valores atípicos, la corrección de los totales anuales y el tratamiento de los extremos de la serie, el método X-11 obtiene la serie ajustada (X_t^a) mediante la aplicación de un esquema (filtro) de medias móviles simétricas ,

$$x_t^a = \sum_{j=-m}^{m} \alpha_j x_{t-j} \quad (\alpha_j = \alpha_{-j}). \qquad (3.1)$$

Este filtro es el resultado de una serie de etapas que siguiendo a Wallis (1974), pág. 19, podemos resumir así:

a) "Calcular las diferencias entre la serie original y una media móvil centrada de doce términos (una media móvil 2 x 12 , es decir, un promedio de dos términos que a su vez son promedios de 12 términos) como una primera estimación de los componentes estacional e irregular.

b) Calcular una media móvil ponderada de 5 términos (una media móvil 3 x 3) para cada mes por separado, para obtener así una estimación del componente estacional.

c) Ajustar estos componentes estacionales para que sumen cero (aproximadamente) en cualquier período de 12 meses, sustrayéndoles una media móvil centrada de 12 términos.

d) Restar a la serie original el componente estacional ajustado, para obtener así una serie preliminar ajustada de estacionalidad.

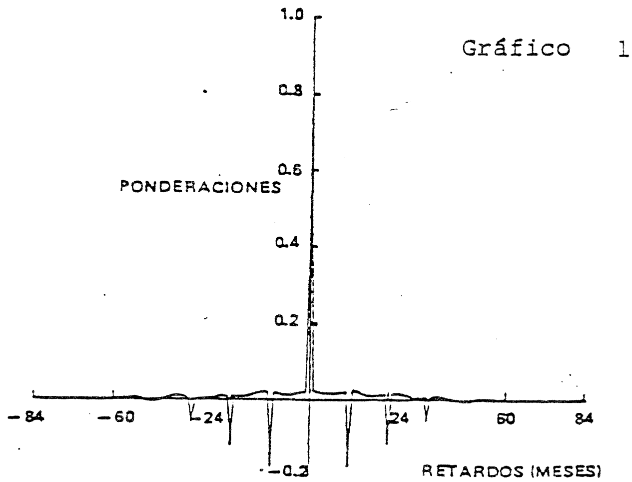
e) Calcular una media móvil de Henderson de 9 , 13 ó 23 términos a la serie ajustada de estacionalidad y restar esta serie de tendencia-ciclo resultante, de la serie original para obtener una segunda estimación de los componentes estacional e irregular.

f) Calcular una media móvil ponderada de siete términos (una media móvil 3 x 5) a cada mes por separado, para obtener una, segunda estimación del componente estacional.

g) Ajustar estos componentes estacionales para que sumen cero (aproximadamente) en cualquier período de 12 meses, sustrayéndoles una media móvil centrada de 12 términos.

h) Restar estas últimas estimaciones del componente estacional a la serie original, para obtener la serie ajustada de estacionalidad.

El resultado de estas etapas es $X^{(a)}$ descrita en (3.1.),donde m = 82, 84 ó 89 según el valor escogido en la etapa e. Los coeficientes α_j de (3.1) para m = 84 se calculan en Wallis (1974). Su representación gráfica se encuentra en el gráfico 1 que ha sido tomado de Wallis (1974) pag. 19.



El método X-11 se ha ido elaborando y perfeccionando a lo largo del tiempo sin hacer referencia, al parecer, a ningún tipo de modelo que sirviese para representar las series económicas. Pero en el diseño del método se fueron teniendo en cuenta las peculiaridades más importantes que se observaban en las series temporales, como la de una tendencia y estacionalidad cambiantes. Por ello -como observa Pierce (1978) pág.243-no es mera coincidencia que procedimientos del tipo X-11 sean óptimos, en el sentido de que minimizan la suma de los cuadrados de los errores en la estimación de S_t, para un tipo de modelos ARIMA. Vemos de este modo, también, que la recomendación de Box et. al. (1973) de conjugar los enfoques empíricos y teóricos sobre series temporales es de gran interés.

El tipo de modelos ARIMA para los que el método X-11 es óptimo ha sido estudiado por Cleveland y Tiao (1976) y la exposición que sigue se basa en dicho trabajo. Supongamos que la X_t sigue el esquema aditivo (1.1) y que

$$\phi_{p_1}(L)TC_t = \theta_{q_1}(L)a_{1t} \qquad (3.2)$$

$$\phi_{p_2}(L)S_t = \theta_{q_2}(L)a_{2t}, \qquad (3.3)$$

donde $\phi_{p_1}(L)$, $\theta_{q_1}(L)$, $\phi_{p_2}(L)$ y $\theta_{q_2}(L)$ son polinomios reales sobre operador L de orden p_1, q_1, p_2 y q_2 respectivamente. Supongamos también que las raices de $\theta_{q_1}(L)$ y $\theta_{q_2}(L)$ están fuera del círculo unitario, y que las raices de $\phi_{p_1}(L)$ y ϕ_p (L) - están en o fuera del círculo unitario y que en (1.1), (3.1) y (3.2) e_t, a_{1t} y a_{2t} son procesos independientes del tipo ruido blanco con distribuciones normales con medias cero y varianzas γ_e, γa_1 y γa_2 respectivamente.(*) Entonces los estimadores que minimizan el error cuadrático medio son la esperanza matemática de TC_t y S_t condicional al vector de observaciones X, $E(TC_t / X)$ y - $E(S_t / X)$. Cleveland y Tiao (1976) demuestran que $E(TC_t/X)$ y $E(S_t/X)$, para valores de t que no estén próximos a los extremos de las series, se pueden aproximar mediante medias móviles simétricas sobre X. En consecuencia, dichos autores argumentan: ".... si se puede encontrar un modelo en él que las esperanzas condicionales den las mismas ponderaciones que las de un filtro particular de medias móviles simétricas, se podrá decir que tal modelo representa una estructura estocástica para dichos filtros". En particular, para el filtro simétrico aplicado en el método X-11 (en el caso de medias de Henderson de 13 elementos) Cleveland y Tiao (1976) encuentran que una estructura estocástica que soporte dicho filtro es

$$(1 - L)^2 \, TC_t = (1 + .49 \, L - .49 \, L^2) \, a_{1t}, \qquad (3.4)$$

$$(1 - L^{12}) S_t = (1 + .64 \, L^{12} + .83 \, L^{24}) a_{2t} \qquad (3.5)$$

con $\gamma_{a_2} / \gamma_{a_1} = 1.3$, $\gamma_e / \gamma_{a_1} = 14.4$ y un elemento residual que es ruido blanco.

Una comparación de las ponderaciones que se obtienen con (3.4) y (3.5) para obtener los componentes tendenciales y estacionales, con las que supone el método X-11 se dan en los gráficos 2 y 3 que han sido tomados de Cleveland y Tiao (1976) pág. 582.

(*) Estas condiciones sobre $\theta q_1(L)$ y $\theta q_2(L)$ son las que expresan Cleveland y Tiao (1976) pero publicaciones posteriores, que comentaremos en la sección siguiente, consideran modelos en los que aparecen raíces unitarias en tales factores. De hecho el polinomio $\theta q_1(L)$ de la ecuación (3.4) tiene una raíz igual a - 0'987

Gráfico 2

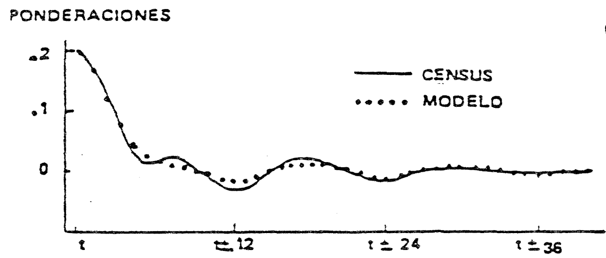
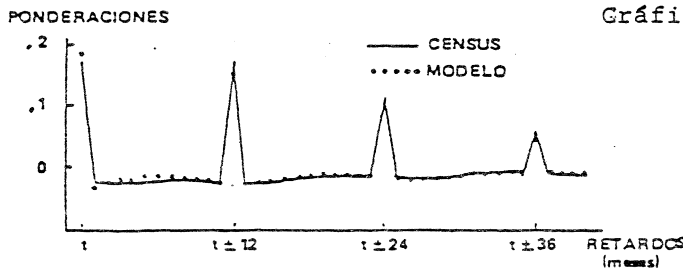


Gráfico 3



Combinando (1.1) con (3.4) y (3.5) el modelo general que se obtiene es :

$$
\begin{aligned}
(1 - L)(1 - L^{12})X_t = (1 &- .337L + .144L^2 + .141L^3 + .139L^4 + \\
&+ .136L^5 + .131L^6 + .125L^7 + .117L^8 + \\
&+ .106L^9 + .093L^{10} + .077L^{11} - .417L^{12} + \\
&+ .232L^{13} - .001L^{20} - .003L^{21} - \\
&- .004L^{22} - .006L^{23} + .035L^{24} - \\
&- .021L^{25})a_t. \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Las autocorrelaciones que se obtienen para

$$W_t = (1 - L)(1 - L^{12})X_t$$

a partir de (3.6) se dan en el cuadro 1 , tomado de Cleveland y Tiao (1976) pág. 583.

Cuadro 1.

k	e_k								
1-10	-.25	.13	.12	.11	.09	.07	.05	.04	.03
11-20	.18	-.35	.16	0	0	0	0	0	0
21-25	0	0	-01	.03	-.01	k	= 0,	(K 25).	

El modelo propuesto por Cleveland y Tiao (1976) para el componente estacional, (3.5), contiene el operador $(1-L^{12})$. Este operador se puede descomponer de la siguiente forma (véase Box et al. (1978)):

$$(1-L^{12}) = (1-L)\ (1+L+\ ...+L^{11}) = (1-L)\ U_{11}(L),$$

en donde el factor $U_{11}(L)$ se forma a partir de once de las doce raíces de $(1 - L^{12})$ y (1-L) con la raíx real positiva. El operador $U_{11}(L)$ tiene cinco pares de raíces complejas, cuyas frecuencias son 1/12, 1/6, 1/4, 1/3 y 1/2'4 y una raíz real negativa (-1) que genera periodicidades de dos unidades de tiempo. Así pues, $U_{11}(L)$ recoge los factores harmónicos con la frecuencia 1/12, y, por tanto, puede asignarse al componente estacional. Por el contrario (1-L) es un operador tendencial. Por ello, Box et al. (1978) al tratar la descomposición estacional del modelo (2.10) proponen el siguiente modelo,

$$U_{11}(L)S_t = (1-\psi_1 L-...-\psi_{11}L^{11})\ a_t,$$

para el componente estacional.

Hillmer y Tiao (1982), en su procedimiento para el ajuste estacional de una serie temporal a partir del modelo ARIMA que la genera(*), proponen el siguiente modelo para el componente estacional

$$U_{11}(L)S_t = \eta_{11}(L)a_{2t}\ , \qquad (3.3.\ bis)$$

donde $\eta_{11}(L)$ es un polinomio de grado no superior a once.

(*) En la práctica este modelo se desconoce y se actúa bajo el supuesto de que el modelo estimado por el investigador es el modelo que verdaderamente genera la serie.

Este tipo de modelo, en el que el polinomio autorregresivo, $U_{11}(L)$, puede ser también de orden inferior a once formándose con sólo parte de las raíces de $U_{11}(L)$, es el más considerado actualmente para el componente estacional, véase por ejemplo Bell y Hillmer (1984). El modelo (3.3. bis) tiene dos ventajas que conviene destacar:

1) Si $\eta_{11}(L)a_{2t} = 0$ la suma de doce componentes estacionales $-U_{11}(L)S_t-$ sería determinística e igual a cero. Con una expresión general para $\eta_{11}(L)a_{2t}$ tenemos que $U_{11}(L)S_t$ será estocástica, su valor no será necesariamente nulo, pero su esperanza matemática es cero.

2) La función de predicción correspondiente a (3.3.bis) cambia con el origen de la predicción, pero para un origen dado consiste en un esquema estacional fijo, que suma cero cada doce meses consecutivos. Este esquema fijo de la función de predicción sólo se cumple si el orden de $\eta_{11}(L)$ no es superior al de $U_{11}(L)$.

No obstante, esta estructura dada en (3.3.bis) para el componente estacional no está exenta de problemas, cuando el modelo generador de la serie original es distinto al (2.10), véase Maravall (1984 a).

Cleveland (1972), en su tesis doctoral, propone los siguientes modelos como soporte de los filtros utilizados en el procedimiento X-11(*):

$$(1-L)^2 TC_t = (1+0'26L+0'3L^2-0'32L^3)\ a_{1t}\ , \qquad (3.4.bis)$$

$$U_{11}(L)S_t = (1 + 0'26L^{12})\ a_{2t}\ , \qquad (3.5.bis)$$

con $\gamma a_2 / \gamma a_1 = 0,3$ y $\gamma_e / \gamma a_1 = 10,1$.

(*) Estoy agradecido a Agustín Maravall por señalarme la existencia de estos modelos en Cleveland (1972).

El modelo global que se obtiene a partir de (3.4. bis) y 3.5. bis) es

$$(1-L)\ (1-L^{12})X_t = (1-0'23L + 0'25L^2 + 0'22L^3 + 0'22L^4 + 0'22L^5 + 0'22L^6 + 0'22L^7 + 0'28L^8 + 0'21L^9 + 0'20L^{10} + 0'14L^{11} - 0'55L^{12} + 0'29L^{13} - 0'10L^{14})\ a_t\ . \qquad (3.6.bis)$$

Las autocorrelaciones que se obtienen para

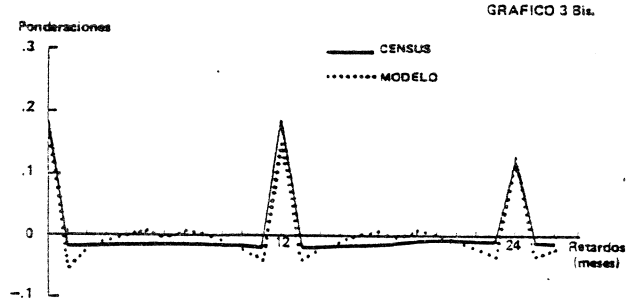
$$W_t = (1-L)\ (1-L^{12})X_t\ ,$$

a partir de (3.6. bis), de acuerdo con Cleveland (1972), son:

K= 1-7	-0'061	0'266	0'226	0'201	0'175	0'150	0'125
K=8-14	0'100	0'075	0'046	0'178	-0'326	0'153	-0'004 .

Las ponderaciones que según (3.4. bis), (3.5. bis y 3.6 bis) se detienen para el cálculo del componente estacional se dan en el gráfico 3. bis tomado de Cleveland (1972).

GRAFICO 3 Bis.



Tenemos dos tipos de modelos que soportan el procedimiento X-11. El modelo definido por las ecuaciones (3.4)a (3.6) y que denominaremos CT y el modelo definido por las ecuaciones (3.4. bis), (3.5. bis) y (3.6. bis), que denominaremos C. El primero tiene el inconveniente que en la definición del componente estacional entra el operador (1-L), y ambos modelos tienen el inconveniente que la función de predicción del componente estacional, para un origen dado, cambia su esquema anual y podría argumentarse, como hacen Bell y Hillmer (1984), que el cambio predecible del componente estacional debería ser parte de la tendencia.

Si nos fijamos en las ponderaciones que los modelos C y CT suponen para el cálculo del componente estacional, tenemos que CT se aproxima mejor que C al método X-11. Por otra parte los resultados de Hillmer et al.(1983) sección 5 señalan que la media cuadrática de las revisiones de la estimación del componente estacional corriente, realizadas a medida que llegan nuevas observaciones, en el procedimiento X-11 y en su procedimiento, basado en la descomposición del modelo ARIMA generador de la serie original, es similar cuando, siendo dicho modelo ARIMA del tipo (2.10), Θ_1 toma un valor alrededor de 0'4. En los modelos (3.6) y (3.6. bis) vemos que el coeficiente de L^{12} en el operador de medias móviles es más próximo a 0'4 en el primero que en el segundo.

En conclusión podemos decir que parece que habría que buscar un tercer modelo que sirviese de soporte al procedimiento X-11 y que al mismo tiempo cumpliese la restricción de la ecuación (3.3. bis), no obstante el modelo CT parece preferible al C.

En el modelo (3.6) los coeficientes de valor absoluto mayor corresponden a los retardos 1, 12 y 13; vemos pues que (3.6) es un modelo bastante próximo a (2.10) que, como decíamos antes, se muestra útil para representar gran número de series económicas estacionales (Véase por ejemplo Box et al.(1978)).

Tras todo lo expuesto, podemos ver ahora los méritos e inconvenientes del método X-11. En la medida que el procedimiento se aplica a series económicas que pueden considerarse como generadas por procesos estocásticos similares a (3.6) el método X-11 estará cerca del óptimo, en el sentido descrito anteriormente. Así, al aplicar Cleveland y Tiao (1976) el X-11 a la serie temporal de pasajeros de líneas aéreas, recogida en Box-Jenkins (1970) capítulo 9, obtienen resultados aceptables en el sentido de que el correlograma de los residuos, $(X_t - \hat{TC}_t - \hat{S}_t)$, parece indicar que éstos no siguen ningún modelo, es decir, pueden tomarse como ruido blanco(*). Este resultado es explicable pues Box-Jenkins (1970) identifican para dicha serie el modelo ARIMA (2.10) con $\theta_1 = .4$ y $\Theta_1 = .6$, que es un modelo con la misma estructura AR que (3.6) y con una estructura MA relativamente próxima a la de (3.6).

Por el contrario al aplicar Cleveland y Tiao (1976) el X-11 a la serie de desconexiones telefónicas recogida en Thompson y Tiao (1971) obtienen unos residuos cuyo correlograma muestra una estructura cíclica muy marcada señalando que el método X-11 no es adecuado en tal caso, ya que no ha extraído toda la estacionalidad de la serie. Estos resultados se comprenden, plenamente, al observar que el modelo ARIMA que Thompson y Tiao (1971) identifican para dicha serie es:

$$(1 - .49L^3)\ (1 - 1.005L^{12})X_t = (1 - .23L^9 - .334L^{12} - .17L^{13})a_t, \quad (3.7)$$

que contiene una estructura AR muy distinta a la de (3.6).

(*) Un procedimiento, muy recomendable, para validar cualquier tipo de ajuste estacional consiste en calcular el correlograma de los residuos y observar si puede considerarse que no hay estructura en el mismo.

Asimismo, como observa Pierce (1978) pág. 244 en el caso en que el aspecto estacional no estacionario de la serie sea determinístico más bien que estocástico, el método X-11 sobre-ajustará la serie. En efecto, si la no estacionaridad es determinística al tomar diferencias estacionales como $(1 - L^{12})$ se introduciría autocorrelación negativa en dichos retardos (compárese con Chan et al. (1977)) y el X-11 producirá normalmente un ajuste excesivo. Esta observación de que los métodos de ajuste estacional por medias móviles pueden remover de la serie más variación que la puramente estacional se hacía ya en Nerlove (1964).

Podemos concluir pues diciendo que la series económicas se pueden representar adecuadamente como realizaciónes de procesos ARIMA y en muchos casos por procesos similares a (2.10). Entre los métodos de ajuste estacional por medias móviles, el método denominado X-11, es óptimo (en el sentido descrito en el texto) para series generadas por procesos ARIMA del tipo (3.6), que es similar a (2.10), y ésto explica que tal método funcione bien para gran número de casos. No obstante, para series en las que las periodicidades estacionales como las de tres y seis meses sean muy marcadas, es previsible esperar que el método X-11 no elimine de la serie original toda la variación estacional. Por el contrario, en series en las que el componente estacionario tenga una estructura determinística (y no estocástica como supone el X-11) es previsible esperar que el método X-11 estime series ajustadas en las que se haya eliminado algo más que la pura variación estacional. Por ello, enfoques como el de Pierce (1978) en las que se combina una estructura determinísticas con una estocástica se muestran de grán interés práctico.

Una aplicación de ajuste estacional, en el caso de que la estacionalidad sea estocástica y determinística al mismo tiempo, se realiza en Espasa (1983) para la serie mensual del índice de producción industrial.

4. Mètodos de ajuste estacional basados en modelos.(*)

Al final de la sección 1 comentábamos que un esquema general y útil, para caracterizar gran parte de las series económicas temporales, es el de los modelos Arima. En la sección 3 hemos visto que el procedimiento de ajuste estacional más utilizado universalmente, que apareció y evolucionó al margen de la teoría estadística de modelos Arima, tiene su justificación teórica si se aplica a series generadas por un determinado tipo de modelos Arima. Estos resultados han inducido a varios investigadores a pensar que el problema de ajuste estacional de una serie específica podría abordarse mediante procedimientos basados en (véase por ejemplo Box et al. (1978), Pierce (1978), Burman (1980), Hillmer y Tiao (1982), Bell y Hillmer (1984), Maravall (1984b),etc.):

1°) obtener el modelo Arima que mejor representa a dicha serie y
2°) estimar el componente estacional de forma que éste sea compatible con tal modelo, bajo el supuesto de que los componentes de la serie siguen también modelos ARIMA. A estos procedimientos se les califica como "métodos de ajuste estacional basados en modelos".

Las bases sobre las que se fundamentan estos procedimientos son:

B1 Se pretende una descomposición del tipo

$$X_t = TC_t + S_t + N_t, \qquad (4.1)$$

en donde N_t es un componente residual, que en ciertos casos puede ser ruido blanco.

(*)Estoy agradecido a Agustín Maravall por las discusiones mantenidas sobre el tema de esta sección que tanto han contribuido a mejorar la exposición que del mismo se hace aquí.

B2 Se supone que los componentes vienen generados por modelos ARIMA de forma que

$$\tilde{\phi}_{TC}(L)TC_t=\theta_{TC}(L)a_{1t}, \qquad (4.2)$$

$$\tilde{\phi}_S(L)S_t=\theta_S(L)a_{2t} \text{ y} \qquad (4.3)$$

$$\phi_N(L)W_t=\theta_N(L)a_{3t}, \qquad (4.4)$$

en donde los subíndices de los polinomios se refieren al componente a que pertenecen y no al orden del polinomio. Los componentes residuales a_{1t}, a_{2t} y a_{3t} vienen generados por procesos ruidos blanco independientes entre sí. El signo ~ sobre un polinomio autorregresivo indica que puede tener raíces en el círculo unitario, de lo contrario las raíces de estos polinomios se les restringe a estar fuera del círculo unitario.

De B1 y B2 se deduce que

$$\tilde{\phi}(L)X_t = \theta(L)a_t , \qquad (4.5)$$

donde $\tilde{\phi}(L)$ se forma con todas las raices no comunes de $\tilde{\phi}_{TC}(L)$, $\tilde{\phi}_S(L)$ y $\phi_N(L)$ y con las comunes en su máximo grado de repetición.

De B1 y B2 se deduce también que:

$$\frac{\theta(L)\,\theta(F)}{\tilde{\phi}(L)\,\tilde{\phi}(F)}\gamma_a = \frac{\theta_S(L)\,\theta_S(F)}{\tilde{\phi}_S(L)\,\tilde{\phi}_S(F)}\gamma_{a_2} + \frac{\theta_{TC}(L)\,\theta_{TC}(F)}{\tilde{\phi}_{TC}(L)\,\tilde{\phi}_{TC}(F)}\gamma_{a_1} + $$
$$+ \frac{\theta_N(L)\,\theta_N(F)}{\phi_N(L)\,\phi_N(F)}\gamma_{a_3} , \qquad (4.6)$$

dónde γ_a, γ_{a1}, γ_{a2} y γ_{a3} son las varianzas de a, a_1,a_2 y a_3 respectivamente y F es el operador de adelantos, es decir, $F = L^{-1}$.

B3 Con todo lo anterior se puede demostrar (véase Cleveland y Tiao (1976)) que los estimadores de de TC y S que minimizan el error cuadrático medio se obtienen mediante la aplicación de filtros simétricos a X_t. Es decir,

$$\widehat{TC}_t = W_{TC}(L)X_t \quad y \tag{4.7}$$

$$\hat{S}_t = W_S(L)X_t \tag{4.8}$$

dónde $W_{TC}(L)$ y W_S son filtros simétricos con las siguientes formas

$$W_S(L) = \frac{\gamma_{a_2}}{\gamma_a} \frac{\tilde{\phi}(L)\ \tilde{\phi}(F)\ \theta_S(L)\ \theta_S(F)}{\theta(L)\ \theta(F)\ \tilde{\phi}_S(L)\ \tilde{\phi}_S(F)} \quad y \tag{4.9}$$

$$W_{TC}(L) = \frac{\gamma_{a_1}}{\gamma_a} \frac{\tilde{\phi}(L)\ \tilde{\phi}(F)\ \theta_{TC}(L)\ \theta_{TC}(F)}{\theta(L)\ \theta(F)\ \tilde{\phi}_{TC}(L)\ \tilde{\phi}_{TC}(F)}. \tag{4.10}$$

Con estos resultados, los métodos de ajuste estacional basados en modelos se desarrollan en dos fases. En una primera, y sobre la base de la relación mencionada entre $\tilde{\phi}_{TC}(L)$, $\tilde{\phi}_S(L)$, $\phi_N(L)$ y $\tilde{\phi}(L)$, se fijan las raíces de $\tilde{\phi}(L)$ que pertenece a cada uno de los polinomios autorregresivos de los componentes, con lo que éstos quedan determinados. En una segunda fase se establecen restricciones sobre γ_{a1}, γ_{a2} y γ_{a3} y utilizando (4.6) se determinan los polinomios $\theta_{TC}(L)$, $\theta_S(L)$ y $\theta_N(L)$. Tenemos pues que en ambas fases se necesita incorporar restricciones adicionales para llegar a estimar TC y S.

Hillmer y Tiao (1982) proponen descomponer $\tilde{\phi}(L)$ de la siguiente forma

$$\tilde{\phi}(L) = (1-L)^d\ U_{11}(L)\ \phi_N(L), \tag{4.11}$$

y asignar $(1-L)^d$ a la tendencia y $U_{11}(L)$ al componente estacional. Con ello tendremos

$$(1-L)^d TC_t = \theta_{TC}(L) a_{1t} \quad \text{y} \tag{4.12}$$

$$U_{11}(L) S_t = \theta_S(L) a_{2t}, \tag{4.13}$$

en donde al orden de $\theta_{TC}(L)$ se restringe a un valor no superior a d y al de $\theta_S(L)$ a un valor no superior a 11.

Estos modelos para TC y S son bastante atractivos si observamos las funciones de predicción para TC_t y S_t que se derivan de ellos. La de S_t ya la hemos comentado en la sección anterior y para TC_t dicha función es un polinomio temporal de orden (d-1) con coeficientes estocásticos, es decir cambian con el período base de la predicción. En el caso, bastante usual, de que d tome el valor dos la función de predicción es una línea recta.

Esta asignación de factores autoregresivos que proponen Hillmer y Tiao (1982) no presenta problemas cuando la serie sigue el modelo (2.10), pero para otros casos más complejos puede ser discutible. Así por ejemplo, si $\tilde{\phi}(L)$ tiene una raíz cuya inversa es 0'8 el usuario estará, normalmente, más interesado en asignarla a TC que a N. En casos como el del modelo (3.7) en el que el factor autorregresivo $(1-0'49L^3)$ tiene una raíz real positiva de valor 0'79 y dos complejas con periodicidad de tres meses, el usuario puede plantearse asignar la raíz real a la tendencia y las complejas al componente estacional (*).

(*) En situaciones de raices complejas cuya frecuencia esté muy próxima a las frecuencias estacionales, pero no coincida exactamente con ellas será conveniente plantearse el restringir el modelo para que dichas frecuencias coincidan con las estacionales.

El ideal pues en esta fase reside en que sea el usuario quien decida la asignación de raíces.

Determinados los factores autorregresivos de TC, S y N tenemos que la elección de $\theta_{TC}(L)$, $\theta_S(L)$, $\theta_N(L)$, γ_{a1}, γ_{a2} y γ_{a3} no es única. Siguiendo a Hillmer y Tiao (1982) podemos denominar <u>descomposición aceptable</u> a cualquier descomposición basada en los $\tilde{\Phi}_{TC}(L)$, $\tilde{\Phi}_S(L)$ y $\Phi_N(L)$ elegidos, que cumpla las restricciones de orden sobre $\theta_{TC}(L), \theta_S(L)$ y que satisfaga (4.6). Para llegar a una descomposición única Hillmer y Tiao (1982) proponen elegir la descomposición aceptable que maximiza γ_{a3}. A ella la denominan <u>descomposición canónica</u>, sus componentes los representaremos por TC_t y S_t, y cumple las siguientes propiedades:

1) Es única.
2) Minimiza γ_{a1} y γ_{a2}, con lo que TC_t y S_t están lo más próximo posible a una estructura determinística.
3) $\theta_S(L)$ y $\theta_{TC}(L)$ tienen al menos una raíz en el círculo unitario, con lo que los modelos de TC_t y S_t no son invertibles.
4) Si S_t y TC_t son cualquier descomposición aceptable distinta de la canónica se cumple que

$$S_t = S_t + \alpha_t$$
$$TC_t = TC_t + \beta_t$$

donde α_t y β_t son elementos ruido blanco.

5) $Var(U_{11}(L)S_t$ es mínima. Es decir la media anual de los componentes estacionales oscila con varianza mínima alrededor de cero.
6) Maximiza la varianza de las revisiones de las estimaciones de los componentes, véase Maravall (1984a).

Respecto a la propiedad 3) de la descomposición canónica hay que señalar que la codición de invertibilidad es importante para representar variables que se refieren a fenómenos reales ya que la invertibilidad implica que el presente se puede representar en función del pasado de forma convergente. Sin embargo la exigencia de invertibilidad puede carecer de significado en la representación de fenómenos imaginarios como son la tendencia y estacionalidad de un fenómeno real. En efecto, en la descomposición (4.1) podríamos decir que TC_t+S_t representan el valor permanente de X_t. Ahora bien el valor permanente de X_t no se puede determinar en t sino que depende de la evolución futura de X, y según sea ésta diremos que lo que ha quedado de permanente de X_t es tanto o cuanto. A las descomposiciones del tipo (4.1) las podemos denominar descomposiciones de futuro o de valor permanente, en las que el presente de sus componentes depende del futuro. Como consecuencia de ello tenemos que en los modelos de TC_t y S_t no hay por qué exigir la condición de invertibilidad. De hecho se podría considerar definir TC_t y S_t con modelos sobre los operadores L y F al mismo tiempo, con lo que quedaría patente la dependencia que el presente tiene con el futuro y por consiguiente la irrelevancia de la exigencia de invertibilidad. La asignación de las raíces del polinomio de medias móviles se podría realizar asociando las raíces unitarias a factores con el operador L y las raíces superiores a la unidad en valor absoluto al operador F. Con ello la dependencia de TC_t y S_t con sus respectivos pasados sería ilimitada en el tiempo y la dependencia con sus respectivos futuros sería convergente, es decir, pasados un número finitos de períodos la dependencia sería tan pequeña que se podría ignorar. Este esquema implica que la construcción del valor permanente tendencia-ciclo y componente estacional en t se hace evaluando todo el pasado de los valores permanentes y considerando el futuro más inmediato.

Sobre los procedimientos de ajuste estacional basados en modelos hemos visto que necesitan decisiones a priori sobre la asignación de las raíces autorregresivas y sobre la exigencia o no de que el componente irregular sea ruido blanco. De estas decisiones a priori dependerá el ajuste final, lo que hace que sea conveniente que la aplicación de estos métodos se lleve a cabo por personal experto que pueda examinar si las características de los componentes obtenidos son acordes con los objetivos que se pretenden en la desestacionalización de la serie bajo estudio. Sobre las decisiones a priori, cuando la serie original sigue un modelo ARIMA básico (*) hay poco margen de discusión y las proposiciones de Hillmer y Tiao (1982) son aceptables, por lo que la programación del ajuste estacional en estos casos puede incorporar dichas proposiciones de oficio, con lo que no será imprescindible que el usuario sea un experto en el tema.

(*) En este contexto, por modelos básicos entendemos modelos que siendo muy sencillos son capaces de incorporar lo esencial de una serie económica. Si ésta contiene tendencia y estacionalidad modelos básicos pueden ser

$$(1-L)(1-L^{12})X_t=(1-\theta_1 L)(1-\Theta_1 L^{12})a_t \text{ y} \qquad \text{(a)}$$

$$(1-L)^2(1-L^{12})X_t=(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2)(1-\Theta_1 L^{12})a_t. \qquad \text{(b)}$$

Si el nivel de la serie oscila localmente, pero no muestra una evolución tendencial de orden superior, podemos considerar modelos básicos los siguientes:

$$(1-L^{12})X_t=(1-\Theta_1 L^{12})a_t \text{ y} \qquad \text{(c)}$$

$$(1-L^{12})X_t=(1-\theta_1 L)(1-\Theta_1 L^{12})a_t. \qquad \text{(d)}$$

Hillmer y Tiao (1982) consideran la descomposición de los modelos (a), (c) y (d).

En los otros casos la exigencia de un usuario experto puede no ser suficiente en el sentido de que decisiones a priori alternativas lleven todas ellas a descomposiciones con problemas. Por este tipo de razones es por lo que el comite de expertos que en el Federal Reserve System (véase Board of Governors of the Federal Reserve System (1981)) examinó el ajuste estacional de los agregados monetarios, recomendaba desarrollar y aplicar métodos basados en modelos junto con el método actualmente utilizado, X-11-ARIMA(*), para acumular experiencia sobre aquéllos con el fin de que sus ventajas relativas pueden ser evaluadas en un contexto realista.

Una observación a realizar sobre los métodos de ajuste basados en modelos consiste en señalar que la descomposición de una serie económica según el esquema (4.1) puede ser insuficiente. En efecto, (4.1) junto con (4.2) a (4.4) conducen a que el modelo explicativo para X_t sea (4.5), pero con frecuencia este es un modelo univariante incompleto para explicar variables económicas. Supongamos que X_t se genera en un modelo econométrico simultáneo en donde ciertas variables exógenas, como precios de la energía, comercio internacional, etc., sufren cambios bruscos en su evolución. Supongamos que tales variables exógenas vienen generadas por modelos ARIMA con análisis de intervención, Box y Tiao (1975). Con tales supuestos tendremos que el modelo univariante de X_t puede requerir también un análisis de intervención. Para que a partir de los modelos de los componentes podamos llegar a un modelo ARIMA con análisis de intervención para la serie global, necesitamos distinguir en la serie un cuarto componente que denominaremos análisis de intervención por movimientos bruscos en las variables exógenas (AI_t). Así:

(*) Véase sección siguiente.

$$X_t = TC_t + S_t + AI_t + N_t, \qquad (4.14)$$

en donde AI_t es no estacionario y de naturaleza determinística. Al presentar las estimaciones obtenidas, el componente AI_t podrá aparecer aisladamente o agregado con TC_t, S_t o con N_t, según se prefiera, pero en el proceso de estimación de los componentes de X_t, habrá sido necesario la consideración explícita del elemento AI_t para no sesgar los resultados sobre la tendencia y estacionalidad, y ello con independencia de si se considera que éstas deben o no incluir a AI_t.

Como conclusión tenemos que los métodos de ajuste basados en modelos son métodos que permiten diseñar el filtro con el que se obtiene la serie ajustada, de acuerdo con las características que presenta la serie original. Por ello son, potencialmente, los métodos que mejores resultados prácticos deben dar, pero en su aplicación requieren una serie de decisiones que, hoy por hoy, deben ser tomadas por personal experto. De hecho puede que la descomposición de una serie tenga que ser siempre controlada por expertos, en el sentido de que sean éstos quienes señalen qué componente de la serie es de interés para el aspecto que se pretende analizar de la misma. En un trabajo pionero sobre el tema, Maravall (1984b), se demuestra que en series con un componente irregular importante, como las series de exportaciones de la economía española, la serie ajustada de estacionalidad es de poca utilidad y estudiar el crecimiento corriente de las exportaciones sobre la base de dichos datos ajustados puede ser equívoco, mientras que hacerlo sobre el componente tendencial solamente es mucho más útil.

En cualquier caso aunque el modelo ARIMA no se utilice para basar el ajuste estacional sobre él, su utilización para mejorar los resultados del procedimiento X-11 es importante. Esto ha llevado a proponer el procedimiento X-11-ARIMA que es el que goza de mayor prestigio actual, véase, por ejemplo, la recomendación primera contenida en el informe Board of Governors of the Federal Reserve System (1981). La sección siguiente la dedicamos a presentar dicho método, propuesto de forma sistemática por Dagum (1980).

5. El método de ajuste estacional X-11 ARIMA.

En la sección anterior hemos comentado los métodos de ajuste estacional que obtienen el filtro para ajustar una determinada serie económica a partir del modelo ARIMA con análisis de intervención que se supone que la genera. Si por las razones que sea, por ejemplo no disponer de un programa de ordenador adecuado, o del personal especializado necesario, no se realiza tal tipo de ajuste estacional, el modelo ARIMA con análisis de intervención todavía se puede utilizar para mejorar el procedimiento de métodos como el X-11.

Las formas de utilizar el modelo en el contexto del X-11 las podemos clasificar como sigue:

1) Para realizar correcciones a priori en la serie, a partir de los resultados del análisis de intervención. Merecen especial mención las correcciones por efecto de Pascua y efecto de calendario.

2) Para corregir valores atípicos (extremos) de la serie.

3) Para alargar la muestra al comienzo y final de la misma.

4) Para seleccionar la longitud de las medias móviles que aplica el procedimiento X-11.

Debido principalmente a los puntos 2) y 3) en el centro Statistics Canada se desarrolló el procedimiento denominado X-11-ARIMA, véase Dagum (1980), que puede utilizarse también para obtener mejoras sobre el método X-11, según los puntos 1) y 4).

El procedimiento X-11 permite que el usuario introduzca factores a priori para corregir la serie en determinadas observaciones con valores atípicos debido a acontecimientos especiales. Si disponemos de un modelo ARIMA con análisis de intervención para la serie objeto de estudio, el componente del análisis de intervención nos señala los momentos atípicos de la serie y, a partir de la estimación obtenida para dicho componente, podremos calcular los factores de corrección de la serie original, que deberemos introducir como factores a priori en el procedimiento X-11. Estos factores pueden ser de naturaleza estacional o no. En el primer caso habrá que tener presente que la serie ajustada por el procedimiento X-11 deberá corregirse con los factores a priori de naturaleza estacional para llegar a una serie ajustada final.

De estas intervenciones de naturaleza, en parte, estacional hay que destacar la debida a los efectos de período de vacaciones alrededor de la fiesta de la Pascua y la debida a la diferente composición de los meses. Esta última se suele denominar intervención por efectos de calendario y es importante en fenómenos cuyos datos diarios tienen estacionalidad semanal, ya que en tal caso el que un mes tenga 5 en vez de 4 días de los de mayor o menor actividad dentro de la semana, afectará a la cifra mensual y la intervención mencionada tiende a explicar dicho efecto. Sobre cómo proceder en estos casos véase Bell y Hillmer (1983). El procedimiento X-11 tiene una opción que permite la corrección por efectos de calendario y calcula los factores estacionales que se derivan del mismo. No obstante, si se dispone de un modelo ARIMA con intervenciones que explica dichos efectos, parece conveniente corregir la serie a partir de esa estimación global y no a partir de las estimaciones del método X-11.

Una aplicación de la consideración de factores a priori estacionales así como de factores por el efecto de Pascua, para la serie del índice de producción industrial español se encuentra en Espasa (1983).

En la modelización univariante de series económicas la aplicación del análisis de intervención suele restringirse a puntos muestrales atípicos en los que se sabe que ha ocurrido algún acontecimiento especial y se tiene cierta información sobre la naturaleza de sus efectos. Sin embargo, la serie temporal puede contener otros puntos atípicos sobre los que no se tenga información a priori. El método X-11 tiene un mecanismo interno de corrección de dichos valores, para evitar que contaminen la estimación de los factores estacionales. En tales casos, si se va a realizar dicha corrección de valores atípicos parece preferible proceder de la forma siguiente. Estimar el efecto anómalo en dichos puntos, a través de un esquema de intervenciones adecuado, en el modelo univariante, calcular los correspondientes factores de corrección que implican en la serie original e introducirlos como factores a priori en el método X-11. De esta forma nos aseguramos que la corrección por valores extremos es compatible con el modelo estocástico que genera la serie y somos conscientes de su introducción y efectos, mientras que la corrección automática por el método X-11 suele pasar desapercibida y en ocasiones sus consecuencias en el ajuste son importantes.

En la sección 3 hemos comentado las distintas medias móviles simétricas que utiliza el procedimiento X-11. Sin embargo, al comienzo y final de la muestra estas medias móviles no se pueden aplicar por falta de datos y se emplean medias móviles truncadas. Esta falta de datos para la estimación contemporánea de la estacionalidad causa el problema de las revisiones de las estimaciones de los factores estacionales a medida que llegan nuevos datos. Este es, sin duda, un problema importante cuyas implicaciones prácticas empiezan a estudiarse ahora con mayor profundidad, y un tratamiento a fondo del tema, para el caso del ajuste estacional de la cantidad de dinero en la economía estado-unidense, puede verse en Maravall y Pierce (1983).

En tanto cuanto la descomposición estacional es una descomposición de valor permanente o de futuro, el problema de las revisiones es inevitable. Sin embargo, si se dispone del modelo univariante que genera la serie original podemos utilizarlo para proyectar dicha serie hacia delante y hacia atrás en ambos extremos de la muestra, y aplicar a la serie así extendida el procedimiento X-11(*). Con ello el truncamiento de las medias móviles en tales extremos desaparecerá o será menor, según sea la extensión de las proyecciones utilizadas, y en la medida que los datos empleados en dichas extensiones muestrales sean buenos estimadores de los datos reales, la estimación contemporánea del factor estacional será mejor, en el sentido de que estará más próxima a la estimación que finalmente se realice cuando haya datos reales suficientes (**).

(*) En principio se pueden utilizar modelos con variables explicativas siempre y cuando que la predicción con ellos sea mejor que la univariante y el modelo pueda considerarse robusto. En general, estos modelos se revisan con excesiva frecuencia y no predicen substancialmente mejor que las univariantes, por lo que estos últimos son los utilizados para los fines que ahora nos incumben.

(**) Esto ocurrirá en el extremo final de la muestra. Respecto el inicial supondremos que si las predicciones mejoran el ajuste al final de la muestra también lo hacen al principio.

Las ventajas de esta extensión muestral a partir de proyecciones con el modelo univariante depende de la naturaleza del fenómeno que representa la serie original. En concreto, depende de la magnitud de la incertidumbre en su evolución futura. En este punto conviene observar que la incertidumbre futura es una característica del fenómeno, y los modelos cuantitativos, univariantes o no, simplemente la reflejan. Por ello, la discusión sobre si tales modelos predicen bien a largo plazo sólo tiene sentido si previamente se ha aceptado, a partir de principios de Teoría Económica, que el largo plazo de dicho fenómeno es predecible con márgenes de error aceptables. En general, la evolución a medio y largo plazo de los fenómenos económicos es malamente predecible, por lo que las proyecciones mencionadas de la serie original, con fines de mejorar el ajuste estacional contemporáneo, no suelen ir más allá de uno o dos años.

El procedimiento X-11 en las estimaciones preliminar y definitiva de los componentes tendencial y estacional permite que el usuario decida la longitud de las medias móviles empleadas en cada caso. La longitud apropiada de tales medias para una serie concreta dependerá de las características de ésta y dichas características se pueden inferir a partir de los parámetros del modelo ARIMA que genera la serie.

Para ilustrar lo anterior consideremos el modelo ARIMA

$$(1-L)X_t = (1-\theta L)a_t. \qquad (5.1)$$

Obsevando que

$$\frac{1-L}{1-L} = 1-(1-\theta)L - \theta(1-\theta)L^2 - \theta^2(1-\theta)L^3 \ldots \quad , \qquad (5.2)$$

tenemos que (5.1) se puede rescribir de la forma,

$$X_t=(1-\theta)X_{t-1}+\theta(1-\theta)X_{t-2}+\theta^2(1-\theta)X_{t-3}+\ldots+a_t, \qquad (5.3)$$

y si denominamos

$$X^{\theta 1}_{t-1}=(1-\theta)X_{t-1}+\theta(1-\theta)X_{t-2}+\theta^2(1-\theta)X_{t-3}+\ldots, \qquad (5.4)$$

tenemos finalmente que

$$X_t = X^{\theta 1}_{t-1}+a_t. \qquad (5.5)$$

A $X^{\theta 1}_{t-1}$ se le denomina el alisado exponencial con desfase operativo de primer orden de la serie X, correspondiente al momento t-1. De forma general podemos definir a

$$X^{\theta \ell}_t = (1-\theta)\sum_{h=0}^{\infty} \theta^h L^{h\ell}\, X_t, \qquad (5.6)$$

como el alisado exponencial de X_t con desfase operativo ℓ.

Para el modelo

$$(1-L^{12})X_t = (1-\theta L^{12})a_t, \qquad (5.7)$$

tenemos que

$$X_t = X^{\theta 12}_t + a_t. \qquad (5.8)$$

y a $X^{\theta 12}_{t-12}$ le denominaremos el alisado exponencial de orden operativo doce, o el alisado exponencial estacional, correspondiente al momento t-12.

Tanto en $X^{\Theta 12}_{t-12}$ como en $X^{\theta 1}_{t-1}$, y en general para todo $X^{\theta \ell}_{t}$, tenemos que la influencia del pasado en la construcción del alisado exponencial depende del parámetro estructural, Θ ó θ, del correspondiente modelo ARIMA. Así cuanto mayor sea tal parámetro en valor absoluto mayor será la influencia del pasado en $X^{\theta \ell}_{t}$, en el sentido de que valores relativamente lejanos de t tienen influencia en el cálculo de $X^{\theta \ell}_{t}$. Por el contrario, si θ es pequeño en valor absoluto el cálculo de $X^{\theta \ell}_{t}$ viene muy influenciado por el valor presente y el pasado inmediato y la influencia del pasado lejano es mínima.

En el modelo

$$(1-L)(1-L^{12})X_t=(1-\theta L)(1-\Theta L^{12})a_t \quad , \tag{5.6}$$

tenemos que

$$(1-L^{12})[X_t-X^{\theta 1}_{t-1}]=(1-\Theta L^{12})a_t \tag{5.7}$$

y operando obtenemos

$$[X_t-X^{\theta 1}_{t-1}]-[X_{t-12}-X^{\theta}_{t-13}]^{\Theta 12}=a_t, \tag{5.8}$$

con lo que

$$X_t= X^{\theta 1}_{t-1} +[X_{t-12}-X^{\theta 1}_{t-13}]^{\Theta 12}+a_t.$$

En (5.10) $X^{\theta 1}_{t-1}$ nos refleja el nivel local de la serie y $[X_{t-12}-X^{\theta 1}_{t-13}]^{\Theta 12}$ los incrementos estacionales sobre tal nivel local. En (5.10) tenemos que θ es el parámetro que controla la tendencia de la serie y cuanto mayor sea el valor absoluto de θ mayor será la influencia del pasado en dicha tendencia. Por otro lado Θ es el parámetro, en (5.10), que controla la estacionalidad de X_t y cuanto mayor sea su valor absoluto mayor será la influencia del pasado en el componente estacional de X_t.

En la sección 3 hemos visto que el procedimiento X-11 es óptimo para series generadas por el modelo (3.6) que se puede aproximar mediante un modelo (5.9) con θ=0'34 y Θ=0'42. En la estimación final de la tendencia el método X-11 utiliza medias de Henderson dejando al usuario la elección de su longitud que puede ser de 9, 13 ó 23 términos. Si consideramos la longitud de 13 como la típica, tendremos que para series generadas por modelos del tipo (5.9) con θ significativamente superior a 0'34 será conveniente escoger una media móvil de 23 términos.

En la estimación final del componente estacional el método X-11 utiliza, como opción estándar, unas medias móviles, (3x5), de siete términos, pero si nuestra serie viene generada por un modelo (5.9) con un parámetro Θ significativamente superior a 0'42 podemos utilizar la opción, (3x9), de medias de once términos.(*)(**)

(*)Cuando la longitud de la serie es inferior a 7 u 11 años pero no inferior a 5, el método X-11 en las opciones (3x5) y (3x9) continúa utilizando medias simétricas, excepto en los extremos de la serie, pero dando menor importancia al pasado en la opción (3x5) que en la (3x9).

(**) Estoy agradecido a W. Bell por realizarme esta sugerencia.

Si la serie no viene generada por un modelo (5.9) sino por uno más general del tipo:

$$\tilde{\phi}(L)\tilde{\Phi}(L^{12})X_t=\theta(L)\Theta(L^{12})a_t,$$

en donde $\tilde{\phi}(L)$ y $\tilde{\Phi}(L^{12})$ pueden tener raíces unitarias, también podemos expresar X_t con un esquema del tipo (5.10), como señalan Box et al.(1978). En efecto, definamos

$$R(L) = \frac{\phi(L)}{\theta(L)} = (1-R_1L - R_2L^2 \ldots\ldots) \quad y$$

$$Q(L) = \frac{\Phi(L^{12})}{\Theta(L^{12})} = (1-Q\ L_1\ ^{12}\ Q\ L_2\ ^{24}\ldots)$$

y denominaremos

$$X_t^{(R)} = R_1X_t + R_2\ X_{t-2}+\ldots \qquad (5.12)$$

$$X_t^{(Q)} = Q\ X_t + Q_2X_{t-12} +\ldots\ .$$

Con ello tenemos que

$$X_t = X_{t-1}^{(R)} + [X_{t-12} - X_{t-13}^{R}]^{(Q)} + a_t, \qquad (5.13)$$

que es una expresión similar a (5.10) pero aquí (R) y (Q) son operadores de sumas móviles más complejas que (5.6) y no necesariamente exponenciales. Sin embargo, el desarrollo de R(L) y Q(L) nos informan sobre la importancia relativa del pasado en el cálculo de la tendencia y estacionalidad, respectivamente, de X_t y sobre dicha información podremos basar la elección de las longitudes de las medias móviles que utiliza el programa X-11.

En la estimación del componente estacional el método X-11 permite también el usuario que elija diferente longitud de media móvil según sea el mes del año. Esta opción se empleará cuando se detecte que la estructura estocástica estacional de la serie debidamente diferenciada no es estacionaria sino que cambia según el mes del año. En tales casos los modelos ARIMA periódicos (véase Tiao y, Grupe (1980)) pueden ser adecuados y podremos basar la elección de la longitud de la media movil en la estimación del factor estacional de cada mes en los parámetros estimados del modelo ARIMA periódico.

BIBLIOGRAFIA

Bell, W.R. y S.C. Hillmer, 1983, "Modelling Time Series with Calendar Variation", J. of. de Ame. Statistical Ass., v.78, n. 383, septiembre, págs. 526-34.

Bell, W.R. y S.C. Hillmer, 1984, "Issues Involved with the Seasonal Adjustment of Economic Time Series", de próxima publicación en J. of Business and Eco. Stats.

Board of Governors of the Federal Reserve System, 1981, Seasonal Adjustment of the Monetary Aggregates: Report of the Commitee of Experts on Seasonal Adjustment Techniques, Washington D.C.: Federal Reserve Board (disponible por 2'75$ en Publication Services, Federal Reserve Board).

Box, G.E.P., S.C. Hillmer y G.C. Tiao, 1978, "Analysis and Modelling of Seasonal Time Series", en Seasonal Analysis of Economic Time Series, ed. A. Zellner, U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, págs. 309-334.

Box, G.E.P. y G.M. Jenkins, (1970), Time Series Analysis Forecasting and Control, Holden-Day, San Francisco.

Burman, J.P., 1980, "Seasonal Adjustment by Signal Extraction", J.R. Statist. Soc.A, 143, part 3, págs. 321-337.

Cleveland, W.P. y G.C. Tiao, 1976, "Descomposition of Seasonal Time Series: A Model for the Census X-11 Program", Journal of the American Statistical Association, v.7, n° 355, septiembre, págs. 581-587.

Chan, K.H., J.C. Hayya y J.K. Ord, 1977, "A Note on Trend Removal Methods: The Case of Polynomial Versus Variate Differencing", Económetrica, v. 45, n° 3, abril, págs. 737-744.

Dagum , E.B., 1980, The X-11 ARIMA Seasonal Adjustment Method, Ottawa: Statistics Canada.

Espasa, A., 1971, "Variables artificiales estacionales y mínimos cuadrados bietápicos", Moneda y Crédito, n°119, diciembre, págs. 53-66.

Espasa, A., 1977, La predicción económica, Banco de España, Servicio de Estudios, Estudios Económicos, n° 18.

Espasa, A., 1983, "Deterministic and Stochastic Seasonality: a univariate study of the Spanish Industrial Production Index", Banco de España, Servicio de Estudios, documento de trabajo 8306.

Granger, C.W.J. y P. Newbold, 1977, Forecasting Economic Time Series, Academic Press, New York.

Hillmer, S.C., W.R. Bell y G.C. Tiao, 1983, "Modelling Considerations in the Seasonal Adjustment of Economic Time Series", en Applied Time Series Analysis of Economic Data, ed. A. Zellner, U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, págs. 74-100.

Hillmer, S.C. y G.C. Tiao, 1982, "An ARIMA-Model-Based Approach to Seasonal Adjustment of Economic Time Series", J. of the Ame. Stat. Ass., v.77, n. 377, marzo, págs. 63-70

Maravall, A., 1984a, "Comment on Issues Involved with the Seasonal Adjustment of Economic Time Series", de próxima publicación en J. of Business and Eco. Stats.

Maravall, A., 1984b, "Model-Based Treatment of a Manic-Depressive Series" de próxima publicación en Computing and Statistics, ed. L. Billard, North-Holland.

Maravall, A., y D. A. Pierce, 1983, "Preliminary-Data error and Monetary Aggregate Targeting", J. of Business and Eco. Stats., v. 1, n. 3, julio, págs. 179-86.

Nerlove, M., 1964, "Spectral Analysis of Seasonal Adjustment Procedures", Econométrica, v. 32, n 3, julio, págs. 241-285.

Pierce, D.A., 1978, "Seasonal Adjustment when both deterministic and stochastic seasonality are present", en Seasonal Analysis of Economic Time Series, ed. A. Zellner, U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, págs. 242-269.

Shiskin, J., A.H. Young y J.C. Musgrave, 1967, "The X-11 variant of the Census Method-II Seasonal Adjustment Program", Technical Paper n° 15 U.S. Bureau of the Census, febrero.

Slutzky, E., 1937, "The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes", Econométrica, v.5. abril, págs. 105-146.

Thomas, J.I. y K.F. Wallis, 1971, "Seasonal Variation in Regression Analysis", Journal of the Royal Statistical Society, Serie A, págs. 57-52.

Thompson, H.E. y G.C. Tiao, 1971, "Analysis of telephone data: a case study of forecasting seasonal time series", The Bell Journal of Economics and Management Science, n° 2, págs. 515-41.

Tiao, G.C. y H.R. Grupe, 1980, "Hidden Periodic Autoregressive-Moving Average Models in Time Series Data", Biometrika, 67, 2, págs. 365-73.

Wallis, K.F., 1974, "Seasonal Adjustment and Relations Between Variables", Journal of the American Statistical Association, v.69, n°345, marzo, pags. 18-31.

Wold, H.O., 1954, A Study in the Analysis of stationary Time Series, 2 Ed., Almqvist y Wicksell, Upsala.

Yule, G.U., 1927, "On a Method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to Wolfer's numbers", Philosophical Transactions (A), págs. 267-298.

DOCUMENTOS DE TRABAJO (1):

8501 **Agustín Maravall**: Predicción con modelos de series temporales.
8502 **Agustín Maravall**: On structural time series models and the characterization of components.
8503 **Ignacio Mauleón**: Predicción multivariante de los tipos interbancarios.
8504 **José Viñals**: El déficit público y sus efectos macroeconómicos: algunas reconsideraciones.
8505 **José Luis Malo de Molina y Eloísa Ortega**: Estructuras de ponderación y de precios relativos entre los deflactores de la Contabilidad Nacional.
8506 **José Viñals**: Gasto público, estructura impositiva y actividad macroeconómica en una economía abierta.
8507 **Ignacio Mauleón**: Una función de exportaciones para la economía española.
8508 **J. J. Dolado, J. L. Malo de Molina y A. Zabalza**: El desempleo en el sector industrial español: algunos factores explicativos. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
8509 **Ignacio Mauleón**: Stability testing in regression models.
8510 **Ascensión Molina y Ricardo Sanz**: Un indicador mensual del consumo de energía eléctrica para usos industriales, 1976-1984.
8511 **J. J. Dolado y J. L. Malo de Molina**: An expectational model of labour demand in Spanish industry.
8512 **J. Albarracín y A. Yago**: Agregación de la Encuesta Industrial en los 15 sectores de la Contabilidad Nacional de 1970.
8513 **Juan J. Dolado, José Luis Malo de Molina y Eloísa Ortega**: Respuestas en el deflactor del valor añadido en la industria ante variaciones en los costes laborales unitarios.
8514 **Ricardo Sanz**: Trimestralización del PIB por ramas de actividad, 1964-1984.
8515 **Ignacio Mauleón**: La inversión en bienes de equipo: determinantes y estabilidad.
8516 **A. Espasa y R. Galián**: Parquedad en la parametrización y omisiones de factores: el modelo de las líneas aéreas y las hipótesis del census X-11. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
8517 **Ignacio Mauleón**: A stability test for simultaneous equation models.
8518 **José Viñals**: ¿Aumenta la apertura financiera exterior las fluctuaciones del tipo de cambio? (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
8519 **José Viñals**: Deuda exterior y objetivos de balanza de pagos en España: Un análisis de largo plazo.
8520 **José Marín Arcas**: Algunos índices de progresividad de la imposición estatal sobre la renta en España y otros países de la OCDE.
8601 **Agustín Maravall**: Revisions in ARIMA signal extraction.
8602 **Agustín Maravall y David A. Pierce**: A prototypical seasonal adjustment model.
8603 **Agustín Maravall**: On minimum mean squared error estimation of the noise in unobserved component models.
8604 **Ignacio Mauleón**: Testing the rational expectations model.
8605 **Ricardo Sanz**: Efectos de variaciones en los precios energéticos sobre los precios sectoriales y de la demanda final de nuestra economía.
8606 **F. Martín Bourgón**: Indices anuales de valor unitario de las exportaciones: 1972-1980.
8607 **José Viñals**: La política fiscal y la restricción exterior. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
8608 **José Viñals y John Cuddington**: Fiscal policy and the current account: what do capital controls do?
8609 **Gonzalo Gil**: Política agrícola de la Comunidad Económica Europea y montantes compensatorios monetarios.
8610 **José Viñals**: ¿Hacia una menor flexibilidad de los tipos de cambio en el sistema monetario internacional?
8701 **Agustín Maravall**: The use of ARIMA models in unobserved components estimation: an application to spanish monetary control.
8702 **Agustín Maravall**: Descomposición de series temporales: especificación, estimación e inferencia (Con una aplicación a la oferta monetaria en España).

8703 **José Viñals y Lorenzo Domingo**: La peseta y el sistema monetario europeo: un modelo de tipo de cambio peseta-marco.
8704 **Gonzalo Gil**: The functions of the Bank of Spain.
8705 **Agustín Maravall**: Descomposición de series temporales, con una aplicación a la oferta monetaria en España: Comentarios y contestación.
8706 **P. L'Hotellerie y J. Viñals**: Tendencias del comercio exterior español. Apéndice estadístico.
8707 **Anindya Banerjee y Juan Dolado**: Tests of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis in the Presence of Random Walks: Asymptotic Theory and Small-Sample Interpretations.
8708 **Juan J. Dolado y Tim Jenkinson**: Cointegration: A survey of recent developments.
8709 **Ignacio Mauleón**: La demanda de dinero reconsiderada.
8801 **Agustín Maravall**: Two papers on arima signal extraction.
8802 **Juan José Camio y José Rodríguez de Pablo**: El consumo de alimentos no elaborados en España: Análisis de la información de Mercasa.
8803 **Agustín Maravall y Daniel Peña**: Missing observations in time series and the «dual» autocorrelation function.
8804 **José Viñals**: El Sistema Monetario Europeo. España y la política macroeconómica. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
8805 **Antoni Espasa**: Métodos cuantitativos y análisis de la coyuntura económica.
8806 **Antoni Espasa**: El perfil de crecimiento de un fenómeno económico.
8807 **Pablo Martín Aceña**: Una estimación de los principales agregados monetarios en España: 1940-1962.
8808 **Rafael Repullo**: Los efectos económicos de los coeficientes bancarios: un análisis teórico.
8901 **M.ª de los Llanos Matea Rosa**: Funciones de transferencia simultáneas del índice de precios al consumo de bienes elaborados no energéticos.
8902 **Juan J. Dolado**: Cointegración: una panorámica.
8903 **Agustín Maravall**: La extracción de señales y el análisis de coyuntura.
8904 **E. Morales, A. Espasa y M. L. Rojo**: Métodos cuantitativos para el análisis de la actividad industrial española.
9001 **Jesús Albarracín y Concha Artola**: El crecimiento de los salarios y el deslizamiento salarial en el período 1981 a 1988.
9002 **Antoni Espasa, Rosa Gómez-Churruca y Javier Jareño**: Un análisis econométrico de los ingresos por turismo en la economía española.
9003 **Antoni Espasa**: Metodología para realizar el análisis de la coyuntura de un fenómeno económico. (Publicada una edición en inglés con el mismo número).
9004 **Paloma Gómez Pastor y José Luis Pellicer Miret**: Información y documentación de las Comunidades Europeas.

(1) Los Documentos de Trabajo anteriores a 1985 figuran en el catálogo de publicaciones del Banco de España.

Información: Banco de España
Sección de Publicaciones. Negociado de Distribución y Gestión
Teléfono: 446 90 55, ext. 2180
Alcalá, 50. 28014 Madrid