FACTORES DE CORRECCION PARA CONTRASTES EN MODELOS DINAMICOS

Ignacio Mauleón

Banco de España. Servicio de Estudios
Documento de Trabajo n.º 8422

El Banco de España al publicar esta serie pretende facilitar la difusión de estudios de interés que contribuyan al mejor conocimiento de la economía española.

Los análisis, opiniones y conclusiones de estas investigaciones representan las ideas de los autores, con las que no necesariamente coincide el Banco de España.

ISBN: 84-505-0850-7

Depósito legal: M. 43457 - 1984

Talleres Gráficos del Banco de España

Resumen

La corrección por grados de libertad del estimador de la varianza de los errores en un modelo de regresión clásico, se suele mantener en modelos dinámicos. En realidad no se sabe si esta corrección empeora o mejora la aproximación. Este trabajo muestra a través de resultados teóricos y de simulaciones que la corrección va en el sentido adecuado, aunque no elimina todo el problema.

Abstract

The work in this paper, builds upon results obtained out of expansions for finite sample distributions of econometric criteria. The finite sample bias of the estimator of the variance in a dynamic model is discussed and a justification for the usual correction is provided.

Palabras clave

sesgo, factores de corrección, muestras finitas

Keywords

bias, correction factors, finite samples

I n d i c e

Abstract

I. Introducción

II. Los momentos de las covarianzas muestrales

III. Un teorema sobre aproximación de momentos

IV. Algunos resultados preliminares

V. El sesgo de $E(\hat{\theta})^2$

VI. El sesgo con restricciones

VII. Un experimento de Monte Carlo

VIII. Conclusión

A.I. La función característica de los segundos momentos muestrales.

A.II. Detalle del teorema de III

Referencias

I. Introducción (*)

Uno de los problemas importantes que en la actualidad tiene planteado la estadística aplicada es la obtención de aproximaciones a las distribuciones de los estadísticos comúnmente utilizados. Salvo raras excepciones, lo único que se conoce con exactitud son las distribuciones cuando $T \to \infty$. Los intentos de resolver este problema han ido en varias direcciones. Hay que observar en primer lugar que el problema se centra en aproximar la distribución en sus extremos ('colas') puesto que en esa zona se llevan a cabo los contrastes de hipótesis. Como un pequeño cambio de probabilidad en esa zona puede implicar un cambio importante en el intervalo correspondiente, el problema es considerable. Una vía de análisis consiste en estudiar la existencia de momentos de las distribuciones ya que esto puede dar una idea del espesor relativo de las colas. Otra se centra en obtener aproximaciones directas a las distribuciones hasta un cierto orden de magnitud en T. Estas aproximaciones no son todavía fácilmente accesibles y de ahí el interés de estudiar modificaciones simples de los estadísticos que acerquen las distribuciones reales a las asintóticas.

Los factores de corrección proporcionan modificaciones simples y fáciles de utilizar. Experimentos de Monte Carlo han mostrado que en muchas ocasiones actuan en la dirección adecuada aunque evidentemente no proporcionan una solución definitiva del problema. Una dificultad típica es que es sencillo derivar ex-post los factores de corrección adecuados, pero no es tan fácil el calcularlos previamente a la realización del experimento. En todo caso, su utilización puede ser de utilidad en muchos casos para prevenir conclusiones absurdas como el siguiente ejemplo muestra. Su

---

(*) Agradezco los comentarios de Tony Espasa

pongamos que estimamos por mínimos cuadrados el modelo

$$Y_t = \sum_{s=1}^{p} \alpha_s Y_{t-s} + \varepsilon_t \quad , \quad t = 1, \ldots, T \qquad (1.1)$$

y consideremos el estadístico 't' para $\hat{\alpha}_s$,

$$t(\hat{\alpha}_s) = \hat{\alpha}_s / (\hat{\sigma}\phi)$$

$$= \sqrt{T}\ \hat{\alpha}_s / ((\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon})^{1/2} \phi) \qquad (1.2)$$

donde ϕ es la correspondiente forma cuadrática en el vector Y_{-s}. Si aumentamos el número de regresores hasta T, la suma de cuadrados es cero, y el estadístico tiende a infinito aunque 'α_s' sea igual a cero. Sin embargo, si introducimos una pequeña corrección por grados de libertad y utilizamos (T-p) en lugar de T ,este problema desaparece o al menos se atenúa. En el caso de las razones 't' casi todos los programas existentes incorporan automáticamente esta corrección. No es así sin embargo, en la mayoría de los contrastes de hipótesis que se realizan comunmente.

Los factores de corrección pueden derivarse a veces como subproductos de la investigación teórica sobre distribuciones finitas y este es el enfoque adoptado en este trabajo. La ventaja de este enfoque es que proporciona una justificación sólida para su uso, ya que anteriormente no existía una justificación acerca de su probable bondad, excepto por algún experimento de Monte Carlo aislado. Al mismo tiempo se introduce al lector en ciertos temas que son básicos en la teoría actual de aproximaciones a distribuciones finitas. Los resultados más concretos del trabajo se obtienen en la sección V.

Los factores de corrección propuestos en este trabajo se derivan del análisis del sesgo en la estimación de la varianza de los residuos. En modelos de regresión lineales con regresores no estocásticos, el estimador máximo verosímil de la varianza del error es sesgado. Sin embargo, una pequeña corrección por grados de libertad elimina el problema. Parece intuitivamente plausible suponer que es conveniente mantener esta corrección en modelos que no cumplan las condiciones clásicas [13]. Aunque asintóticamente es irrelevante, para T finito la corrección puede ser decisiva. En este trabajo se demuestra que en cierto tipo de modelos dinámicos bastante generales, esta intuición es correcta. Más concretamente, se prueba que

$$E\ \hat{\sigma}^2 = \sigma^2 + O(T^{-2}) \qquad (1.3)$$

siendo σ^2 el estimador de la varianza del error del modelo corregido por grados de libertad. La importancia de este hecho radica en que la corrección hace que la aproximación asintótica a la distribución finita sea mejor. El resultado de (1.3) es válido cuando se estima el modelo con o sin restricciones. Una consecuencia inmediata es que los contrastes de Wald, Lagrange, y máxima verosimilitud corregidos por grados de libertad ya no cumplen la desigualdad mencionada en [1] y los criterios de coste pueden ser los decisivos en la elección de un contraste.

El documento está organizado del siguiente modo: la sección II discute brevemente resultados sobre los segundos momentos muestrales que se requieren posteriormente. Parte del análisis se relega al apéndice uno. La sección III es una adaptación de un teorema de Sargan [13] sobre aproximaciones de momentos. El teorema prueba la validez de las aproximaciones tipo Nagar [9] bajo ciertas

condiciones. La IV sección está dedicada a obtener resultados previos que son utilizados en la sección V para probar (1.3). Finalmente, la sección VII recoge algunos resultados de un experimento de Monte Carlo a la vez que se explica la técnica de la variable de control. Un resumen de las conclusiones principales se ofrece al final del documento.

II. Los momentos de las covarianzas muestrales

Consideremos el modelo

$$\alpha(L)\ Y_t = \Sigma_i\ B_i\ (L) X_{it} + \varepsilon_t \qquad t = 1, \ldots\ldots\ T$$

$$\varepsilon_t - N(O,\ \sigma)$$

$$E\varepsilon_t\varepsilon_\zeta = 0\ ,\ t \neq \zeta \qquad (2.1)$$

donde el módulo de las raices de $\alpha(L) = 0$ está fuera del círculo unidad, y las x's son exógenas. Los estadísticos y estimadores corrientes, y en particular $\hat{\sigma}^2$, son funciones de los primeros y segundos datos de la muestra (más adelante se dará un ejemplo). Definamos por 'q_T' el vector de los momentos estocásticos, es decir, los que sean productos cruzados de las 'Y's, o de las 'X's con las 'Y's'.

Para poder aplicar el teorema de la sección siguiente necesitamos probar que $Eq_T = \mu_T$, existe y

1°) $E\left|\sqrt{T}\ (q-\mu)\right|^K$ existe y es $0(1)$ en T, $\forall K$

2°) $E\left|\sqrt{T}\ (q-\mu)\right|^3 = O(T^{-1/2})$ (2.2)

Aquí solo vamos a ver ideas intuitivas. Pruebas rigurosas existen, pero es enormemente laborioso el obtenerlas [14]. Los resultados se obtienen analizando la función característica del vector 'q' que se obtendrá en el apéndice I (Notar que 'q' depende de 'T' al igual que todas sus esperanzas pero se omite el subíndice por claridad de notación).

En primer lugar y definiendo la función característica del vector 'q' como,

$$\Psi_q\ (u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuq}\ f(q)\ dq \qquad (2.3)$$

se puede probar que [14] ,

$$\frac{\partial^r \text{Log } \Psi_q(u)}{\partial q^r} = O(T^{1-r}) \qquad \forall r \qquad (2.4)$$

en un cierto entorno de u= 0. En otras palabras, el cumulante de orden (r) tiende a cero. La prueba se basa en la aplicación para el caso autoregresivo de un método aplicado por Chambers a la distribución de Wishart [2]. Igualmente, como $\mu = Eq = K_1$, μ es de orden uno en T. Definiendo ahora $z_T = (q-\mu)\sqrt{T}$, los cumulantes de 'z_T' de orden ($r \geqslant 3$), tenderán a cero así que,

$$\lim_{T\to\infty} \Psi_{z_T}(u) = e^{iu'm + i^2 u' \Omega u/2} \qquad (2.5)$$

donde $\Omega = \lim_{T\to\infty} \left(TE(q-\mu)(q-\mu)'\right)$, y $m = \lim_{T\to\infty} (\mu_T)$. En otras palabras

$$\sqrt{T}\,(q-\mu) \underset{A}{\sim} N(O,\Omega) \qquad (2.6)$$

puesto que (2.5) es la función característica de una normal.

Como 'z_T' tiende a una normal, es evidente que los momentos de 'z_T' además de existir por el argumento dado anteriormente, tienden a un límite finito cuando $T\to\infty$, es decir son de orden uno en T. Finalmente, y como 'z_T' tiende a una distribución normal, es evidente que

$$E(z_T)^3 = O(T^{-\alpha}) \qquad \alpha > 0 \qquad (2.7)$$

pues los momentos impares de una normal centrada son cero. No es difícil sospechar que $\alpha = 1/2$ como efectivamente puede verse a continuación. En primer lugar y como $(q-\mu)$ es una transformación lineal de 'q' la función característica de

$(q - \mu)$ puede escribirse como

$$e^{-iu\mu}\ \psi_q(u) = \exp\left(\sum_{s=2}^{\infty} K_s\ u^s/s!\right)$$

$$= \left(1 + \sum_{r=0}^{\infty} \delta_r\ u^r/r!\right) \qquad (2.8)$$

ya que $K_1=\mu$ y donde $\delta_r = E(q - \mu)^r$, y K_s es el cumulante de orden 's' de la variable 'q'. Expandiendo (2.8) e igualando potencias de 'u' es fácil obtener

$$\delta_3 = K_3 \qquad (2.9)$$

y como $K_3 = 0\ (T^{-1})$ es automático que $E(z_T)^3 = 0(T^{-1/2})$

III. Un teorema sobre aproximación de momentos

El teorema de este apartado es una adaptación simplificada de un teorema general dado por Sargan en [13]. El teorema tal como está dado allí, es difícl de interpretar. Por otra parte, los supuestos son desde un punto de vista práctico excesivamente generales, lo que complica bastante la argumentación.

Es conveniente definir una región creciente con T del siguiente modo, para un vector 'p'

$$s_T = \{ p \mid (p'p)\ T^{1-\varepsilon} < c; \quad c > 0\ ,\ \varepsilon > 0\} \tag{3.1}$$

Supongamos ahora que,

1°) El vector $(p\sqrt{T})$ tiene momentos de todo orden, y son de orden uno en T.

2°) Consideremos una función de un vector 'q', $\phi(q)$, 'r' veces derivable en 's_T' y cuyas derivadas son uniformemente acotadas siendo $(q-\mu)= p$, $E_q = \mu$.

3°) $E \mid \phi(q) \mid^K$ existe para algún $K>1$

Entonces,

$$E \mid \phi(q) \mid^K - E \mid \phi_r(q) \mid^K = O(T^{-r/2}) \tag{3.2}$$

donde $\phi_r(.)$ es una aproximación a $\phi(.)$, basada en una expansión de Taylor de 'r' términos alrededor de 'μ', eliminando el último término.

La lógica de la prueba se basa en dividir el espacio de integración en dos regiones, y esquemáticamente consta de tres pasos,

$$E\left|\phi(q)\right|^k - E_{s_T}\left|\phi(q)\right|^k = O(T^{-r/2})$$

$$E_{s_T}\left|\phi(q)\right|^k - E_{s_T}\left|\phi_r(q)\right|^k = O(T^{-r/2})$$

$$E_{s_T}\left|\phi_r(q)\right|^k - E\left|\phi_r(q)\right|^k = O(T^{-r/2}) \qquad (3.3)$$

La prueba de que cada elemento eliminado es del orden de magnitud indicado queda relegada al apéndice II.

El teorema es aplicable al caso de modelos dinámicos sin medias móviles. En este tipo de modelos, los estimadores suelen ser funciones de los primeros y segundos momentos de los datos muestrales. Estos momentos forman el vector 'q' cuya función característica cumple las condiciones requeridas por el teorema (sección II y apéndice 1).

Por último, el momento ordinario tiene el mismo orden de magnitud que el momento absoluto, y así, los resultados para momentos ordinarios pueden ser deducidos inmediatamente de este teorema.

IV. Algunos resultados preliminares

Para obtener la conclusión de la siguiente sección se requieren varios resultados preliminares. En primer lugar, para poder aplicar el teorema de la sección anterior, requerimos que $E(\hat{\sigma}^2)^K$ exista para algún $K > 1$. El tipo de modelos que vamos a considerar, son de la forma autoregresiva, y pueden escribirse como sigue

$$y_t = z_t' \gamma + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma)$$

$$E\varepsilon_t \varepsilon_\zeta = 0 \qquad t \neq \zeta$$

$$z_t' = (y_{t-1}, \ldots, y_{t-p}, x_{1t}, \ldots, x_{nt}) \ , \quad p+n = K$$

$$\gamma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_n) \tag{4.1}$$

El estimador máximo verosímil de $\hat{\sigma}^2$ es

$$\hat{\sigma}^2 = (\varepsilon' M_z \varepsilon)/T$$

$$= \frac{\varepsilon'\varepsilon}{T} - \frac{\varepsilon' z (z'z)^{-1} z'\varepsilon}{T}$$

$$< (\varepsilon'\varepsilon/T) \tag{4.2}$$

ya que $(z(z'z)^{-1} z'/T)$ es semipositiva definida. Entonces,

$$E\ \hat{\sigma}^2 < E(\varepsilon'\varepsilon/T) = \sigma^2 \tag{4.3}$$

es decir que $E\ \sigma^2$ existe. Igualmente, podemos probar que $E(\hat{\sigma}^2)^K$, $K>1$ existe si los errores 'ε' son normales. (Requerimos que $K>1$, para poder aplicar el resultado del teorema anterior). De hecho, sería suficiente suponer que el momento de segundo orden de $\hat{\sigma}^2$ existe. Para ello nos basta con imponer la condición de que los cumulantes de cuarto orden de 'ε' existan. Esta última condición es la usual en

teoremas centrales del límite muy generales, así que, en el presente contexto no supone ninguna restriccion adicional[3].

Los primeros y segundos momentos de los datos están formados por los elementos de (z'y/T) y (z'z/T). Es evidente que $\hat{\sigma}^2$es una función de estos momentos (ver también el apéndice 1). Los elementos estocásticos de estas matrices son aquí, del tipo

$$\sum_{t=1-a}^{T-a} (Y_t \; Y_{t-s})/T \qquad \begin{matrix} s = 1, \ldots, p \\ a = 0, \ldots, (p-1) \end{matrix}$$

$$\sum_{t=1}^{T} (X_{it} \; Y_{t-s})/T \qquad \begin{matrix} s = 1, \ldots, p \\ i = 1, \ldots, n \end{matrix} \qquad (4.4)$$

Definamos el vector 'q', como el vector que agrupa estos momentos estocásticos. Consideremos ahora

$$\frac{z'\varepsilon}{T} = \frac{z'Y}{T} - \left(\frac{z'z}{T}\right)\gamma \qquad (4.5)$$

Como $E(Y_{t-s} \; \varepsilon_t) = 0$, si $s > 0$

$$0 = E\left(\frac{z'Y}{T}\right) - E\left(\frac{z'z}{T}\right)\gamma \qquad (4.6)$$

de modo que

$$\left(\frac{z'\varepsilon}{T}\right) = \left(\frac{z'Y}{T} - E\left(\frac{z'Y}{T}\right)\right) - \left[\frac{z'z}{T} - E\left(\frac{z'z}{T}\right)\right]\gamma$$

$$= A(q-\mu) \qquad (4.7)$$

donde $\mu = Eq$ (el subíndice T en 'q' y 'μ' se omite por motivos de claridad notacional). La matriz A en (4.7) es una matriz que depende de los parámetros 'γ' . Ahora po-

demos escribir el estimador mínimo cuadrático de 'γ' como,

$$\hat{\gamma} = (z'z)^{-1} z'y$$

$$= \gamma + (z'z/T)^{-1} A(q - \mu) \qquad (4.8)$$

Definamos $TE(q- \mu)(q- \mu)' = \Omega_T$, y consideremos

$$E\left[(z'\varepsilon)(z'\varepsilon)' \frac{1}{T}\right] \qquad (4.9)$$

Los términos que no incluyen variables exógenas son del tipo

$$E\left[\left(\sum_{t=1}^{T} Y_{t-s} \varepsilon_t\right)\left(\sum_{\zeta=1}^{T} Y_{\zeta-r}\varepsilon_\zeta\right)\right] =$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{\zeta=1}^{T} E(Y_{t-s} \varepsilon_t Y_{\zeta-r}\varepsilon_\zeta) \qquad (4.10)$$

Para analizar esta expresión consideremos la esperanza de cada término del sumatorio en (4.10), en los casos $t= \zeta$, $t \neq \zeta$

$$E(Y_{t-s} \varepsilon_t Y_{\zeta-r} \varepsilon_\zeta) =$$

$$\begin{cases} E(Y_{t-s} \varepsilon_t Y_{\zeta-r}) E(\varepsilon_\zeta) = 0 & t < \zeta \\ E(Y_{t-s} Y_{t-r}) E(\varepsilon^2_t) = \sigma^2 E Y_{t-s} Y_{t-r} & t = \zeta \end{cases} \qquad (4.11)$$

(Notar que si $t \neq \zeta$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $t < \zeta$). Similarmente, con los términos que implican también regresores estocásticos

$$E\left[\sum_{t=1}^{T} (Y_{t-s} \varepsilon_t) \sum_{\zeta=1}^{T} (X_{i\zeta}\varepsilon_\zeta)\right] =$$

$$\begin{cases} 0 & t \neq \zeta \\ \sigma_\varepsilon^2 \sum_{t=1}^{T} X_t \, EY_{t-s} & t = \zeta \end{cases} \qquad (4.12)$$

Entonces podemos escribir,

$$\frac{1}{T} E\left[(z' \varepsilon)\ (z' \varepsilon)'\right] = \sigma_\varepsilon^2 E(z'z'/T)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{z'z}{T}\right)\Big|_{q=\mu} \qquad (4.13)$$

donde la expresión (z'z/T) está evaluada en μ =Eq. Finalmente, de (4.7) obtenemos inmediatamente que

$$\sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{z'z}{T}\right)\Big|_{q=\mu} = (A\ \Omega_T\ A') \qquad (4.14)$$

Definiendo ahora $D = (z'Y/T)_{q=\mu}$, $\mu_1 = E(Y'Y/T)$, tenemos que

$$E(Y'Y/T) = E(Y'z/T)\gamma + E(\gamma'\varepsilon/T) \qquad (4.15)$$

lo que puede escribirse también de modo trivial como

$$\mu_1 = D'\gamma + \sigma^2$$

Por otra parte, de (4.8) es obvio que $\hat{\gamma}(q=\mu)=\gamma$ Entonces,

$$\hat{\sigma}^2 = (\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}/T)$$

$$= (Y'Y - Y'z\ (z'z)^{-1}\ z'Y)/T$$

$$= q_1 - (Y'z/T)\hat{\gamma} \qquad (4.17)$$

asi que

$$\sigma^2(q=\mu) = \mu_1 - D'\gamma$$

$$= \sigma^2 \qquad (4.18)$$

de (4.16)

V. El sesgo de E ($\hat{\sigma}^2$)

El estimador máximo verosímil de la varianza σ^2_ε es

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\varepsilon'\varepsilon}{T} - \frac{\varepsilon'z}{T}\left(\frac{z'z}{T}\right)^{-1}\frac{z'\varepsilon}{T}$$

$$= \frac{\varepsilon'\varepsilon}{T} + N \qquad (5.1)$$

Entonces,

$$E\sigma^2 = E\left(\frac{\varepsilon'\varepsilon}{T}\right) + EN$$

$$= \sigma^2 + EN \qquad (5.2)$$

El sesgo es por tanto EN. Para obtener una aproximación, utilizamos la técnica de la sección III. Es decir, expresamos en primer lugar N como una función del vector 'q', que es derivable al menos tres veces en un entorno de 'μ'. En segundo lugar efectuamos una expansión de Taylor de tercer orden alrededor de 'μ' y tomamos esperanzas. Para evaluar esta expresión necesitamos obtener las derivadas de N respecto a 'q', que se obtienen a continuación.

Definiendo $(z'z/T) = \hat{p}$, $\hat{p}(q=\mu) = p$, y utilizando (4.7)

$$N = -\frac{\varepsilon'z}{T}\left(\frac{z'z}{T}\right)^{-1}\frac{z'\varepsilon}{T}$$

$$= -(q-\mu)'\,A'\,\hat{p}^{-1}\,A(q-\mu) \qquad (5.3)$$

Definiendo $N_{ij} = (\partial^2 N/\partial q_i\,\partial q_j)$ evaluada en $q = \mu$, es evidente que las derivadas de (5.3) son

$$N_{ij} = -2A'_i\,p^{-1}\,A_j \qquad (5.4)$$

donde A_i es la columna 'i' de la matriz A. Esto es así, debido a que las derivadas en las que aparezca el término dp^{-1} estarán multiplicadas por $(q-\mu)$. Utilizando la notación tensorial para los subíndices y definiendo $w_{ij} = \Omega_{ij}$ (ver apéndice 2, II.5)

$$\begin{aligned} N_{ij}\, w_{ij} &= -2(A_i'\, p^{-1} A_j) w_{ij} \\ &= -2\ \mathrm{tr}(A'\, p^{-1} A\ \Omega) \\ &= -2\ \mathrm{tr}\ p^{-1}\ (A\,\Omega\,A') \\ &= -2\ \mathrm{tr}\ k\ \sigma^2 \\ &= -2\ \sigma^2 k \end{aligned} \qquad (5.5)$$

Consideremos ahora una expansión de Taylor de tercer orden de N como función de q, alrededor de 'μ',

$$N = \frac{1}{\sqrt{T}}\ N_i\ r_i + \frac{1}{2T}\ N_{ij}\ r_i\ r_j + \frac{1}{6T^{3/2}}\ N^{+}_{ijk}\ r_i r_j r_k \qquad (5.6)$$

donde $r_i = \sqrt{T}\ (q - \mu)_i$. Tomando esperanzas obtenemos,

$$\begin{aligned} EN &= \int Nf(q)\,dq \\ &= \frac{1}{2T}\ N_{ij}\ w_{ij} + 0(T^{-2}) \\ &= -\sigma^2 \frac{K}{T} + 0(T^{-2}) \end{aligned} \qquad (5.6)$$

El segundo término (5.6) desaparece puesto que es una suma de elementos de la forma

$$N_i \int (q - \mu)_i\ f(q_i) \qquad (5.7)$$

que obviamente son iguales a cero. En la sección II, se ha visto que $E\left(\sqrt{T}\ (q-\mu)\right)^3 = 0(T^{-1/2})$ asi que el último término de (5.6) es efectivamente del orden de magnitud indicado.

El interés de estimar correctamente $\hat{\sigma}^2$ estriba en que este valor lo requerimos en la construcción de intervalos de confianza para el vector 'γ'. Si en promedio infraestimamos σ^2, podemos sospechar que vamos a sobreestimar la probabilidad atribuída a un intervalo basado en la distribución asintótica. Acabamos de ver que similarmente al caso de regresores fijos

$$E\left(\frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{T-K}\right) = \sigma^2 + 0(T^{-2}) \qquad (5.8)$$

Este resultado sugiere que es mejor utilizar el estimador de σ^2 corregido por grados de libertad. Los experimentos de Monte Carlo recogidos por ejemplo en [5] y [7] confirman este resultado.

VI. El sesgo con restricciones

Supongamos ahora que el vector γ cumple unas restricciones lineales parametrizadas por $R\gamma = s$, donde R es una matriz de constantes conocidas de rango 'r', y s un vector de constantes.

Definamos los símbolos $(\hat{})$, $(\tilde{})$ para indicar respectivamente estimadores restringidos y no restringidos. Es bien sabido que

$$\tilde{\gamma} = \hat{\gamma} - (z'z)^{-1} R \left[R'(z'z)^{-1} R\right]^{-1} (R\hat{\gamma} - s) \qquad (6.9)$$

Entonces, como $z'\hat{\varepsilon} = 0$,

$$\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} + (\hat{\gamma}-\tilde{\gamma}) (z'z) (\hat{\gamma}-\tilde{\gamma})$$

$$= \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} + \varepsilon'z(z'z)^{-1} R \left[R'(z'z)^{-1}R\right]^{-1} R'(z'z)^{-1} z'\varepsilon \qquad (6.10)$$

Entonces,

$$\frac{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}}{T} = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{T} + (q-\mu)'A'\hat{p}^{-1}R\left[R'\hat{p}^{-1}R\right]^{-1} R\,\hat{p}^{-1}A(q-\mu)$$

$$= \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{T} + N^{+} \qquad (6.11)$$

Por motivos similares a los del caso anterior

$$N^{+}_{ij} = 2A'_i\, p^{-1}R\left[R'p^{-1} R\right]^{-1} R'p^{-1} A_j \qquad (6.12)$$

Utilizando un razonamiento enteramente análogo al seguido en (5.5) es inmediato que

$$N^{+}_{ij}\ w_{ij} = 2\sigma^2 r \qquad (6.13)$$

Entonces, y de modo similar al desarrollo de (6.6)

$$EN^{+} = \sigma^2 \frac{r}{T} + 0\ (T^{-2}) \qquad (6.14)$$

con lo que finalmente,

$$E\left(\frac{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}}{T}\right) = E\ \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{T} + EN^{+} + 0(T^{-2})$$

$$= \sigma^2 \frac{T-K}{T} + \sigma^2 \frac{r}{T} + 0(T^{-2})$$

$$= \sigma^2 \left(\frac{T-K+r}{T}\right) + 0(T^{-2}) \qquad (6.15)$$

de modo que a semejanza del caso de regresores fijos,

$$E\ \left(\frac{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}}{T-K+r}\right) = \sigma^2 + 0(T^{-2}) \qquad (6.16)$$

Las distribuciones finitas tienen colas más anchas que sus aproximaciones asintóticas en general. Una explicación reside en el sesgo en la estimación de σ^2. La aplicación inmediata de estos resultados sugiere factores de corrección para los tests usuales de Wald, Lagrange, y de máxima verosimilitud. Un resultado de esta corrección va a ser que la desigualdad mencionada en [1] ya no se cumple en general.

Los tests de Wald, (W), Lagrange (LM) y de máxima verosimilitud (LR) en el contexto del modelo de este trabajo, para contrastar restricciones lineales en los parámetros son respectivamente,

$$W = T\left(\frac{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}\right)$$

$$LM = T\left(\frac{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon}}\right)$$

$$LR = T \text{ Log } (\tilde{\varepsilon}'\tilde{\varepsilon} \;/\; \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}) \qquad (6.17)$$

Es evidente que $LM < W$. Por otra parte,

$$LR = W - \frac{W^2}{T2(1+w\delta)^2} \qquad 0 < \delta < 1$$

$$= LM + \frac{LM^2}{T2(1+LM\lambda)^2} \qquad 0 < \lambda < 1 \qquad (6.18)$$

así que finalmente

$$LM \leqslant LR \leqslant W \qquad (6.19)$$

siendo esta la desigualdad bien conocida, obtenida en [1]. Podemos notar que

$$LR - W = 0(T^{-1})$$

$$= LR - LM \qquad (6.20)$$

y así los tests convergen en probabilidad además de en distribución y son por ello asintóticamente equivalentes. Como $(LM')^2 = (W')^2 + 0(T^{-1})$ es fácil ver que

$$W - LR = \frac{T^{-1}}{2} W^2 + 0(T^{-2})$$

$$LR - LM = \frac{T^{-1}}{2} W^2 + 0(T^{-2})$$

$$W - LR \simeq LR - LM \simeq (W')^2/(2T) \qquad (6.21)$$

Con regresores no estocásticos se puede obtener una distribución exacta a partir del test de Wald (aunque no para el de Lagrange ni el de máxima verosimilitud).

$$\left(\frac{T - K}{Tr}\right) W = F_{(r,\ T-K)} \qquad (6.22)$$

Cuando hay regresores estocásticos, se pueden utilizar factores de corrección derivados a partir del sesgo en la estimación de σ^2. Los tests modificados, son aproximables por distribuciones F, según las expresiones

$$\left(\frac{T - K}{Tr}\right) W \sim F_{(r,\ T-K)}$$

$$\left(\frac{T-K+r}{Tr}\right) LM \sim F_{(r,\ T-K+r)}$$

$$\left(\frac{T-K+r/2}{Tr}\right) LR \sim F_{(r,\ T-K+r/2)} \qquad (6.23)$$

El último factor de corrección se basa en (6.21) Si 'r' es impar el redondeo hasta un valor entero es arbitrario. Volviendo a (6.17), es obvio ahora que la desigualdad de (6.19) ya no se cumple. Como las distribuciones finitas tienen colas más anchas que sus aproximaciones asintóticas frecuentemente, en base al resultado (6.19) habría que recomendar el uso del test de Lagrange. Sin embargo, una vez que se corrige por grados de libertad, este criterio desaparece y la única vía posible de avance son las aproximaciones de Edgeworth. Además, aunque en estos casos simples una corrección por grados de libertad elimina gran parte del problema, no parece que este tipo de resultados pueda extenderse con facilidad a casos más generales con restricciones no lineales y modelos simultáneos.

VII. Un experimento de Montecarlo

Para obtener una comprobación empírica de los resultados anteriores se ha diseñado un pequeño experimento de Montecarlo. Los datos han sido generados por el modelo,

$$Y_t = \alpha\, Y_{t-1} + \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t - N(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

$$E(\varepsilon_r \varepsilon_s) = 0, \quad (r \neq s)$$

$$X_t = \lambda X_{t-1} + v_t \qquad v_t - N(0,\sigma_v^2)$$

$$E(v_r\, v_s) = 0, \quad (r \neq s) \qquad (7.1)$$

Las X's han sido generados una sola vez y se han mantenido constantes en las repeticiones del experimento, con los valores $\lambda = 0.7$, $\sigma_v^2 = 1.0$. Se ha estimado en cada caso la media de los dos estimadores siguientes,

$$\hat{\sigma}^2 = \left(\frac{\hat{\varepsilon}'\,\hat{\varepsilon}}{T}\right)$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \left(\frac{\hat{\varepsilon}'\,\hat{\varepsilon}}{T-K}\right) \qquad (7.2)$$

donde $\hat{\varepsilon} = (I - z(z'z)^{-1}z')Y$, $z_t = (Y_{t-1},\ 1.0\ ,\ X_t)$

Los valores considerados, han sido todas las combinaciones de,

$$\alpha = (0.3,\ 0.8)$$

$$\beta = (0.1,\ 1.0)$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = (1.0,\ 3.0)$$

$$T = (10\ ,\ 20,\ 40) \qquad (7.3)$$

donde $\beta = \beta_0, \beta_1$. El número de repeticiones en cada experi-

mento ha sido de 1000. Para mejorar la estimación de la media se ha utilizado la técnica de la variable de control que consiste en los siguiente (ver por ejemplo [4]). Supongamos que 'Y' es una variable aleatoria tal que $(Y-m)\sqrt{T} = O_p(1)$ y que su distribución asintótica es conocida. Sea 'X' otra variable aleatoria cuya distribución es conocida y que cumple $(Y-X) = O(1/T)$ es decir que asintóticamente $(Y-m_y)\sqrt{T}$ y $(X-m_x)\sqrt{T}$ tienen la misma distribución. La variable de control 'Y^C' se define ahora como,

$$Y^C = Y - (X - EX) \tag{7.4}$$

suponiendo que (EX), existe. Así, si (EY) existe

$$EY^C = Ey \tag{7.5}$$

Consideremos ahora,

$$v(Y^C) = v(Y) + v(X) - 2 \text{ cov } (Y \quad , X) \tag{7.6}$$

suponiendo que todos los momentos relevantes de segundo orden existen. Como $(Y-X) = O(1/T)$ frecuentemente se cumplirá que

$$v(Y^C) < v(Y) \tag{7.7}$$

Consideremos ahora un experimento de Montecarlo, en el que se replica de modo independiente la variable aleatoria 'Y' , N veces. El estimador de la media y su varianza están dados por

$$(\hat{E}\,Y) = \left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)/N$$

$$v(\hat{E}\,Y) = \frac{1}{N}\, v(Y) \tag{7.8}$$

Definamos un estimador alternativo '$\tilde{Y}$' por

$$(\tilde{E}\,Y) = \left(\sum_{i=1}^{N} Y_i^C\right)/N$$

$$v(\tilde{E}Y) = \frac{1}{N} \; v(Y^c) \qquad (7.9)$$

De (6.5) y (6.7), es claro que

$$v(\tilde{E}Y) < v(\hat{E}Y) \qquad (7.10)$$

Es posible mejorar considerablemente este análisis aunque aquí no se ha llevado a cabo para simplificar la programación [7]. Por otra parte, la utilidad de esta técnica en econometría es limitada pues es frecuente que ni siquiera los primeros momentos existan. En todo caso, este problema es más importante en el contexto de modelos multiecuacionales, que en el caso de modelos uniecuacionales dinámicos.

Los resultados del experimento están recogidos en las tablas I a III. Como resumen, observamos lo siguiente:

a) el sesgo sube si 'β' disminuye

b) si 'α' aumenta, el sesgo aumenta para 'β' bajo y a la inversa para 'β' alto (este efecto no es claro para T alto).

c) si σ^2_ε aumenta, el sesgo crece solo ligeramente

d) si T aumenta, todos los sesgos decrecen. La tasa de caída en el estimador no corregido ($\hat{\delta}$) es claramente de orden (T^{-1}). En el estimador corregido no se aprecia con claridad el hecho de que el sesgo es de orden T^{-2}, pero esto puede ser debido a que los sesgos son de por si, ya muy pequeños para cualquier valor de T.

e) el sesgo del estimador corregido, es pequeño en general y para un valor razonable de T es casi despreciable.

El peligro de obtener estimadores muy sesgados parece ser por tanto mayor, en modelos donde el componente dinámico es alto y con raices lejanas a cero. En la práctica, es frecuente encontrar modelos donde el cociente (K/T) corresponde al caso analizado aquí para T = 20. Una simple inspección visual de las tablas, muestra que la corección por grados de libertad es importante, pero que aun así, los sesgos son todavía apreciables.

La importancia de la estimación de 'σ^2', estriba en que este estimador se utiliza en los contrastes de hipótesis. El estimador σ^2, aparece en el denominador de los tests, y es probable que el sesgo negativo sea la causa de que en general las distribuciones finitas tengan colas más anchas que sus contrapartidas asintóticas. La importancia de este hecho para el contraste de hipótesis es crucial. Fundamentalmente lo que dice es que la probabilidad de error tipo I es mayor de lo que creemos, y que para obtener un nivel de significación determinando los intervalos deben ser considerablemente más amplios que los sugeridos por una aproximación asintótica.

Finalmente, como la corrección por grados de libertad no elimina todo el sesgo, parece conveniente utilizar tests del tipo 't' de student y 'F' de Snedecor como aproximación a las distribuciones finitas. Ello es debido a que las colas de una distribución (nF(n,m)) son más anchas que la de una $\chi^2(n)$. La evidencia suministrada en [5] y [7] va en esta misma dirección.

Tabla I

σ	α	β	MV	MVL
1.0	0.3	0.1	0.64 56%	0.91 10%
		1.0	0.69 45%	2.99 1%
	0.8	0.1	0.54 85%	2.77 30%
		1.0	0.72 39%	1.02 2%
3.0	0.3	0.1	1.91 57%	2.73 10%
		1.0	1.99 50%	2.84 5.5%
	0.8	0.1	1.62 50%	2.34 50%
		1.0	1.95 54%	2.79 75%

MV = $(\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon} / T)$

MVC= $(\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon} / T-K)$

T = 10

K = 3

Tabla II

σ	α	β	MV	MVL
1.0	0.3	0.1	0.78 28%	0.92 8.5%
		1.0	0.85 18%	0.996 0.5%
	0.8	0.1	0.76 32%	0.9 11%
		1.0	0.88 14%	1.03 3%
3.0	0.3	0.1	2.34 28%	2.76 8.5%
		1.0	2.44 23%	2.87 4.5%
	0.8	0.1	2.27 32%	2.68 12%
		1.0	2.54 18%	2.98 0.5%

MV = $(\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon} / T)$

MVL = $(\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon} / T-K)$

T = 20

K = 3

Tabla III

σ	α	β	MV	MVL
1.0	0.3	0.1	0.86 16%	0.93 7.5%
		1.0	0.41 10%	0.99 1%
	0.8	0.1	0.88 14%	0.96 4%
		1.0	0.95 5%	1.03 3%
3.0	0.3	0.1	2.58 16%	2.79 7.5%
		1.0	2.67 12%	2.89 3.8%
	0.8	0.1	2.64 12%	2.85 5%
		1.0	2.8 7%	3.04 1%

MV = $(\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon} / T)$

MVL = $(\hat{\varepsilon}' \hat{\varepsilon} / T-K)$

T = 40

K = 3

VIII. Conclusión

La corrección por grados de libertad del estimador de σ^2 elimina una parte importante del sesgo, tanto en el caso de que se estime bajo la hipótesis nula o bajo la alternativa. Esta corrección es especialmente importante en el contraste de hipótesis. La desigualdad bien conocida entre los tests de Wald, Lagrange y máxima verosimilitud [1] ya no se cumple después de la corrección.

Desgraciadamente, la generalización de este tipo de resultados a modelos más complicados no parece obvia en absoluto. Así, la única vía posible para la obtención de aproximaciones más ajustadas a las distribuciones finitas de validez general, al menos por el momento, parece residir en el uso de expansiones de Edgeworth. Existe ya una extensa literatura sobre el tema, y este parece ser uno de los campos más importantes de investigación teórica en el futuro. Algunos resúmenes recientes pueden verse en [7], [10] , y [11].

A.I. La función característica de los segundos momentos muestrales.

Es útil trabajar a través de un modelo sencillo para entender el problema. Consideremos entonces el modelo,

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta X_t + \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim N(0,\sigma)$$

$$t = 1, \ldots T$$

$$|\alpha| < 1 \qquad \text{(I.1)}$$

y donde las x's son exógenas. El vector de los momentos (estocásticos) primeros y segundos de los datos es,

$$q_1 = \left(\sum_{t=1}^{T} Y_t^2 \right)/T$$

$$q_2 = \left(\sum_{t=1}^{T} Y_t \; Y_{t-1} \right)/T$$

$$q_3 = \left(\sum_{t=1}^{T} Y_{t-1}^2 \right)/T$$

$$q_4 = \left(\sum_{t=1}^{T} X_t \; Y_t \right)/T$$

$$q_5 = \left(\sum_{t=1}^{T} X_t \; Y_{t-1} \right)/T \qquad \text{(I.2)}$$

Es fácil ver ahora que el estimador objeto de este documento, es decir $\hat{\sigma}^2$, puede escribirse como función del vector 'q', es decir,

$$\hat{\sigma}^2 = (Y'Y - Y'z(z'z')^{-1} z'Y)/T$$

$$= q_1 - (q_2 \; q_4) \begin{bmatrix} q_3 & q_5 \\ q_5 & \hat{\sigma}^2_{XX} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{bmatrix} \qquad \text{(I.3)}$$

donde $z_t = (Y_{t-1}, 1, X_t)$. (Todo el análisis es condicional en los X's lo que no quita generalidad al planteamiento).

Al objeto de obtener la función característica es conveniente escribir los momentos por medio de las matrices que se definen a continuación:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0' \\ 0 & I_T \end{bmatrix} \frac{1}{T}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\left[H_2^{+} + H_2^{+'}\right] \quad , \quad H_2^{+} = \frac{1}{T}\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} I_T & 0 \\ 0' & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{T}$$

$$G'_4 = \frac{1}{T} \; (0, X_1, \ldots, X_T)$$

$$G'_5 = \frac{1}{T} \; (X_1, \ldots X_T, 0) \qquad \text{(I.4)}$$

Entonces, definiendo $Y' = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_T)$, los momentos pueden escribirse como sigue,

$$q_1 = Y' H_1 Y$$

$$q_2 = Y' H_2 Y$$

$$q_3 = Y' H_3 Y$$

$$q_4 = G'_4 Y$$

$$q_5 = G'_5 Y \qquad \text{(I.5)}$$

Como 'ε' está distribuído normalmente, también lo estará 'Y', así que podemos escribir $Y\text{-}N(m, \Omega)$.

Consideremos ahora la función característica de una variable $z = g(x)$. Esta función puede obtenerse como

$$E\ e^{iuz} = \int e^{iu\ g(x)}\ f(x)\ dx \qquad (I.6)$$

La prueba no es en absoluto obvia y está dada en [6] . Entonces, la función característica del vector 'q' puede escribirse (véase [15]), como

$$E\ \exp\left\{ Y' \left(\sum_{s=1}^{3} i\theta_s H_s \right) Y + \left(\sum_{s=1}^{2} \phi_s\ i\ G'_s \right) Y \right\} =$$

$$\left(\frac{|\Omega^{-1}|}{|\Omega^{-1} - 2\ \Theta|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[m'\Omega^{-1}m - (m'\Omega^{-1}+\Psi')\ (\Omega^{-1}-2\Theta)^{-1}\ (\Omega^{-1}m+\Psi) \right] \right\} \qquad (I.7)$$

donde

$$\Theta = i \sum_{s=1}^{3} \theta_s\ H_s$$

$$\Psi = \sum_{s=1}^{2} \phi_s\ G_s$$

Esta última expresión no es difícil de obtener La técnica consiste en organizar el exponente de modo que aparezcan dos términos en 'Y', uno lineal y otro cuadrático. Entonces este exponente será del tipo Gaussiano, y su integral es uno multiplicado por una constante. Esta constante se obtiene fácilmente analizando la matriz de la forma cuadrática.

Para obtener una expresión totalmente operativa de (I.7) requerimos $E(Y)$, y $v(Y)$. Para ello, consideremos

$$Y_t = m_t + u_t \quad , \quad m_t = EY_t \qquad (I.8)$$

Es evidente que

$$m_t = \alpha m_{t-1} + X_t$$

$$u_t = \alpha u_{t-1} + \varepsilon_t$$

asi que $\Omega = v(u)$. Las medias se pueden obtener con facilidad recursivamente, una vez que tengamos 'm_0' . Cómo obtener este valor inicial es otro problema, para el que caben distintas soluciones. Una discusión sobre este punto puede verse en [7].

A.II. Detalle del teorema de III

Necesitamos en primer lugar el siguiente lemma que está probado en [12]. Utilizando las definiciones dadas anteriormente de 's_T' y 'p', y si (p|T) tiene momentos finitos de todo orden cuando $T \to \infty$,

1. $P\left[\text{'p'} \in {}^{\sim}s_T\right] = O(T^{-r/2})$ (II.1)

donde ${}^{\sim}s_T$ es el complementario de s_T

2. Definiendo $E_{{}^{\sim}s_T}(p'p)^r$ como la contribución al momento 'r' de (p'p) en el conjunto ${}^{\sim}s_T$

$$E_{{}^{\sim}s_T}(p'p)^r = O(T^{-r/2}) \qquad \text{(II.2)}$$

El símbolo 'r' se usa aquí para un entero arbitrario y el símbolo de orden O(.), se usa en el sentido amplio, es decir, que si $A = O(T^{-r_1})$ podemos escribir $A = O(T^{-r_2})$ con tal de que $r_1 > r_2 > 0$.

El lemma es del tipo de Tchebycheff y se demuestra con facilidas siguiendo el mismo tipo de argumento. Es decir, se considera $E(p'pT)^r$, dividiendo el espacio de integración en 's_T' y '${}^{\sim}s_T$', y el momento indicado proporciona la cota finita requerida.

Para escribir la expansión de Taylor de una función de varias variables es útil utilizar el teorema multinomial. Este teorema puede expresarse por la siguiente igualdad

$$\left(\sum_{j=1}^{K} a_j\right)^n = n! \sum_{p} \prod_{i=1}^{K} \left(\frac{a_i^{n_i}}{n_i!}\right) \qquad \text{(II.3)}$$

donde p es el conjunto de todas las particiones enteras de n [8].

Definiendo $\partial_i\phi = \partial\phi/_{q=n}$ y similarmente para derivadas de orden más alto, podemos definir

$$\phi(q) = \phi_r(q) + R(q) \qquad \text{(II.4)}$$

donde

$$\phi_r(q) = \sum_{s=1}^{(r-1)} \frac{1}{s!} (p_i \partial_i)^s \phi$$

$$R(q) = \frac{1}{r} (p_i \partial_i)^r \phi^* \qquad \text{(II.5)}$$

siendo q*un punto medio entre 'q' y 'μ'. Se ha utilizado asimismo la notación tensorial para los subíndices, en el sentido de que cuando quiera que un subíndice aparece repetido dos veces, se sobreentiende que es un sumatorio para todos los valores del subíndice.

Consideremos ahora en primer lugar,

$$E|\phi(a)|^k - E_{s_T}|\phi(a)|^k = E_{\sim s_T} |\phi(a)|^k$$

$$= \int_{\sim s_T} |\phi(a)|^k \, f(q)$$

$$= \int_{\sim s_T} (|\phi(a)|^K)^{k/K} f(a)^{k/K} \, f(q)^{(K-k)/K}$$

$$\leq \left[\int_{\sim s_T} |\phi(a)|^K |f(q)|^{k/K} \right] \left[\int_{\sim s_T} f(q) \right]^{(K-k)/K}$$

$$\leq E\,\phi(q)^k \int_{\sim s_T} f(q)^{(K-k)/K} \qquad \text{(II.6)}$$

donde se ha utilizado la desigualdad de Hölder en el penúltimo paso. En $\sim s_T$ podemos definir ahora una cota inferior para (p'p) en la forma $(p'p) > cT^{\varepsilon-1} > c^+$, de modo que

$$\int_{\sim s_T} f(q) < \frac{1}{c^+} \int_{\sim s_T} (q-\mu)'(q-\mu)\, f(q)$$

$$= O(T^{-r/2}) \qquad \text{(II.7)}$$

aplicando la segunda parte del lemma. Entonces, de (II.6) y (II.7)

$$E|\phi(q)|^k - E_{s_T}|\phi(q)|^k = O(T^{-r/2}) \qquad \text{(II.8)}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la expresión $|a|^K$, obtenemos,

$$|a|^K - |b|^K \lesssim K\,|a^+|^{(K-1)}|a - b| \qquad \text{(II.9)}$$

donde $|a^+| = \max(|a|, |b|)$. Como $\phi(q)$ y $\phi_r(q)$ están acotados en 's_T' podemos escribir,

$$E_{s_T}|\phi(a)|^k - E_{s_T}|\phi_r(a)|^k \lesssim \beta \int_{s_T} |\phi(q) - \phi_r(q)|$$

$$\lesssim \beta \int_{s_T} |R(q)| \qquad \text{(II.10)}$$

donde β es alguna constante.

Como $R(q)$ es un sumatorio de derivadas acotadas en s_T, multiplicadas por momentos de orden 'r' en 'p',

$$\int_{s_T} |R(q)| = T^{-(r/2)} \int_{s_T} T^{r/2}\,|R(q)|$$

$$= O(T^{-r/2}) \qquad \text{(II.11)}$$

puesto que $E\left[T(p'p)\right]^{r/2}$ existe. Entonces de (II.10) y (II.11), tenemos

$$E_{s_T}|\phi(q)|^k - E_{s_T}|\phi_r(q)|^k = O(T^{-r/2}) \qquad \text{(II.12)}$$

Finalmente, expandiendo $|\phi_r(q)|^k$ y aplicando la segunda parte del Lemma, es fácil ver que

$$E_{S_T}|\phi(q)|^k - E_{S_T}|\phi_r(q)|^k = O(T^{-r/2}) \qquad \text{(II.13)}$$

R E F E R E N C I A S

[1] BERNDT, E. and SAVIN, N.E., "Conflict among criteria for testing hypothesis in the multivariate linear regression model". Econométrica (1977)

[2] CHAMBERS, J.M. "On methods of asymptotic approximation for multivariate distributions" Biometrika (1967).

[3] HANNAN, E.J., "Multiple time series". New York. John Wiley. 1970.

[4] HENDRY, D.F. "On the behaviour of inconsistent instrumental variables estimators in dynamic systems with autocorrelated error', Cowles Foundation Discussion Paper. (1976).

[5] KIVIET, J. "On the rigour of some specification test for modelling dynamic relationships". Faculty of Actuarial Science and Econometrics, University of Amsterdam.(1982).

[6] LUKACS, E. and LAHA, R.G. "Applications of caracteristic functions". London Griffin and Co., (1964).

[7] MAULEON, I. "Approximations to the finite sampe distribution of Econometric chi-squared criteria". London School of Economics. Tesis doctoral no publicada (1982).

[8] MOOd. A.M.et al."Introduction to the theory of statistics". Mc Graw Hill (1974).

[9] NAGAR, A.L. "The bias and the moment matrix of the general K-class estimators of the parameters in simultaneous equations". Econometrica (1959).

[10] PHILLIPS, P.C.B. "Finite sample theory and the distributions of alternative estimators of the marginal propensity to consume". Review of Economic Studies (1980).

[11] ROTHENBERG, T.J. "Approximating the distribution of econo metric estimators and test statistics". Mimeo L.S.E. (1982).

[12] SARGAN, J.D. "Gram-Charlier approximations applied to t-ratios of k-class estimators". Econométrica (1975).

[13] SARGAN, J.D. "Econometric estimators and the Edgeworth approximation". Econométrica (1976).

[14] SARGAN, J.D. and SATCHELL, S. "The validity of multivariate Edgeworth expansions for autoregressive models". L.S.E. workshop in econometric methodology, mimeo (1979).

[15] SARGAN, J.D. and TsE, Y.K. "Some experience of numerical computation of Edgeworth approximations". L.S.E. Econometrics Programm Discussion Papep. n° A21(1979).

[16] STUART and KENDALL. "The advanced theory of statistics". Griffin London (1969).

DOCUMENTOS DE TRABAJO:

7801 **Vicente Poveda y Ricardo Sanz**: Análisis de regresión: algunas consideraciones útiles para el trabajo empírico (*).

7802 **Julio Rodríguez López**: El PIB trimestral de España, 1958-1975. Avance de cifras y comentarios (*). (Publicadas nuevas versiones en Documentos de Trabajo núms. 8211 y 8301).

7803 **Antoni Espasa**: El paro registrado no agrícola 1964-1976: un ejercicio de análisis estadístico univariante de series económicas (*). (Publicado en Estudios Económicos n.º 15).

7804 **Pedro Martínez Méndez y Raimundo Poveda Anadón**: Propuestas para una reforma del sistema financiero.

7805 **Gonzalo Gil**: Política monetaria y sistema financiero. Respuestas al cuestionario de la CEE sobre el sistema financiero español (*). Reeditado con el número 8001.

7806 **Ricardo Sanz**: Modelización del índice de producción industrial y su relación con el consumo de energía eléctrica.

7807 **Luis Angel Rojo y Gonzalo Gil**: España y la CEE. Aspectos monetarios y financieros (*).

7901 **Antoni Espasa**: Modelos ARIMA univariantes, con análisis de intervención para las series de agregados monetarios (saldos medios mensuales) M_3 y M_2.

7902 **Ricardo Sanz**: Comportamiento del público ante el efectivo (*).

7903 **Nicolás Sánchez-Albornoz**: Los precios del vino en España, 1861-1890. Volumen I: Crítica de la fuente.

7904 **Nicolás Sánchez-Albornoz**: Los precios del vino en España, 1861-1890. Volumen II: Series provinciales.

7905 **Antoni Espasa**: Un modelo diario para la serie de depósitos en la Banca: primeros resultados y estimación de los efectos de las huelgas de febrero de 1979.

7906 **Agustín Maravall**: Sobre la identificación de series temporales multivariantes.

7907 **Pedro Martínez Méndez**: Los tipos de interés del Mercado Interbancario.

7908 **Traducción de E. Giménez-Arnau**: Board of Governors of the Federal Reserve System-Regulations AA–D–K–L–N–O–Q (*).

7909 **Agustín Maravall**: Effects of alternative seasonal adjustment procedures on monetary policy.

8001 **Gonzalo Gil**: Política monetaria y sistema financiero. Respuestas al cuestionario de la CEE sobre el sistema financiero español (*).

8002 **Traducción de E. Giménez-Arnau**: Empresas propietarias del Banco. Bank Holding Company Act-Regulation «Y» (*).

8003 **David A. Pierce, Darrel W. Parke, and William P. Cleveland, Federal Reserve Board and Agustín Maravall, Bank of Spain**: Uncertainty in the monetary aggregates: Sources, measurement and policy effects.

8004 **Gonzalo Gil**: Sistema financiero español (*). (Publicada una versión actualizada en Estudios Económicos n.º 29).

8005 **Pedro Martínez Méndez**: Monetary control by control of the monetary base: The Spanish experience (la versión al español se ha publicado como Estudio Económico n.º 20).

8101 **Agustín Maravall, Bank of Spain and David A. Pierce, Federal Reserve Board**: Errors in preliminary money stock data and monetary aggregate targeting.

8102 **Antoni Espasa**: La estimación de los componentes tendencial y cíclico de los indicadores económicos.

8103 **Agustín Maravall**: Factores estacionales de los componentes de M_3. Proyecciones para 1981 y revisiones, 1977-1980.

8104 **Servicio de Estudios**: Normas relativas a las operaciones bancarias internacionales en España.

8105 **Antoni Espasa**: Comentarios a la modelización univariante de un conjunto de series de la economía española.

8201 **Antoni Espasa**: El comportamiento de series económicas: Movimientos atípicos y relaciones a corto y largo plazo.

8202 **Pedro Martínez Méndez e Ignacio Garrido**: Rendimientos y costes financieros en el Mercado Bursátil de Letras.

8203 **José Manuel Olarra y Pedro Martínez Méndez**: La Deuda Pública y la Ley General Presupuestaria.

8204 **Agustín Maravall**: On the political economy of seasonal adjustment and the use of univariate time-series methods.

8205 **Agustín Maravall**: An application of nonlinear time series forecasting.

8206 **Ricardo Sanz**: Evaluación del impacto inflacionista de las alzas salariales sobre la economía española en base a las tablas input-output.

8207 **Ricardo Sanz y Julio Segura**: Requerimientos energéticos y efectos del alza del precio del petróleo en la economía española.

8208 **Ricardo Sanz**: Elasticidades de los precios españoles ante alzas de diferentes inputs.

8209 **Juan José Dolado**: Equivalencia de los tests del multiplicador de Lagrange y F de exclusión de parámetros en el caso de contrastación de perturbaciones heterocedásticas.

8210 **Ricardo Sanz**: Desagregación temporal de series económicas (*).

8211 **Julio Rodríguez y Ricardo Sanz**: Trimestralización del producto interior bruto por ramas de actividad. (Véase Documento de Trabajo n.º 8301).

8212 **Servicio de Estudios. Estadística**: Mercado de valores: Administraciones Públicas. Series históricas (1962-1981).

8213 **Antoni Espasa**: Una estimación de los cambios en la tendencia del PIB no agrícola, 1964-1981.

8214 **Antoni Espasa**: Problemas y enfoques en la predicción de los tipos de interés.

8215 **Juan José Dolado**: Modelización de la demanda de efectivo en España (1967-1980).

8216 **Juan José Dolado**: Contrastación de hipótesis no anidadas en el caso de la demanda de dinero en España.

8301 **Ricardo Sanz**: Trimestralización del PIB por ramas de actividad series revisadas

8302 **Cuestionario OCDE. Servicio de Estudios. Estadística**. Cuadro de flujos financieros de la economía española (1971-1981) (*).

8303 **José María Bonilla Herrera** y **Juan José Camio de Allo**: El comercio mundial y el comercio exterior de España en el período 1970-1981: Algunos rasgos básicos.

8304 **Eloísa Ortega**: Indice de precios al consumo e índice de precios percibidos.

8305 **Servicio de Estudios. Estadística**: Mercado de Valores: Instituciones financieras. Renta fija. Series históricas (1962-1982).

8306 **Antoni Espasa**: Deterministic and stochastic seasonality: an univariate study of the Spanish Industrial Production Index.

8307 **Agustín Maravall**: Identificación de modelos dinámicos con errores en las variables.

8308 **Agustín Maravall, Bank of Spain and David A. Pierce, Federal Reserve Board**: The transmission of data noise into policy noise in monetary control.

8309 **Agustín Maravall**: Depresión, euforia y el tratamiento de series maníaco-depresivas: el caso de las exportaciones españolas.

8310 **Antoni Espasa**: An econometric study of a monthly indicator of economic activity.

8311 **Juan José Dolado**: Neutralidad monetaria y expectativas racionales: Alguna evidencia en el caso de España.

8312 **Ricardo Sanz**: Análisis cíclicos. Aplicación al ciclo industrial español.

8313 **Ricardo Sanz**: Temporal disaggregation methods of economic time series.

8314 **Ramón Galián Jiménez**: La función de autocorrelación extendida: Su utilización en la construcción de modelos para series temporales económicas.

8401 **Antoni Espasa y María Luisa Rojo**: La descomposición del indicador mensual de cartera de pedidos en función de sus variantes explicativas.

8402 **Antoni Espasa**: A quantitative study of the rate of change in Spanish employment.

8403 **Servicio de Producción y Demanda Interna**: Trimestralización del PIB por ramas de actividad, 1975-1982.

8404 **Agustín Maravall**: Notas sobre la extracción de una señal en un modelo ARIMA.

8405 **Agustín Maravall**: Análisis de las series de comercio exterior —I—.

8406 **Ignacio Mauleón**: Aproximaciones a la distribución finita de criterios Ji- cuadrado: una nota introductoria.

8407 **Agustín Maravall**: Model-based treatment of a manic-depressive series.

8408 **Agustín Maravall**: On issues involved with the seasonal adjustment of time series.

8409 **Agustín Maravall**: Análisis de las series de comercio exterior —II—.
8410 **Antoni Espasa**: El ajuste estacional en series económicas.
8411 **Javier Ariztegui y José Pérez**: Recent developments in the implementation of monetary policy.
8412 **Salvador García-Atance**: La política monetaria en Inglaterra en la última década.
8413 **Ignacio Mauleón**: Consideraciones sobre la determinación simultánea de precios y salarios.
8414 **María Teresa Sastre y Antoni Espasa**: Interpolación y predicción en series económicas con anomalías y cambios estructurales: los depósitos en las cooperativas de crédito.
8415 **Antoni Espasa**: The estimation of trends with breaking points in their rate of growth: the case of the Spanish GDP.
8416 **Antoni Espasa, Ascensión Molina y Eloísa Ortega**: Forecasting the rate of inflation by means of the consumer price index.
8417 **Agustín Maravall**: An application of model-based signal extraction.
8418 **John T. Cuddington y José M. Viñals**: Budget deficits and the current account in the presence of classical unemployment.
8419 **John T. Cuddington y José M. Viñals**: Budget deficits and the current account: An intertemporal disequilibrium approach.
8420 **Ignacio Mauleón y José Pérez**: Interest rates determinants and consequences for macroeconomic performance in Spain.
8421 **Agustín Maravall**: A note on revisions in arima-based signal extaction.
8422 **Ignacio Mauleón**: Factores de corrección para contrastes en modelos dinámicos.

* *Las publicaciones señaladas con un asterisco se encuentran agotadas.*

Información: Banco de España, Servicio de Publicaciones. Alcalá, 50. 28014 Madrid.