

PREDICCIÓN CON MODELOS DE SERIES TEMPORALES

Agustín Maravall

Banco de España. Servicio de Estudios
Documento de Trabajo n.º 8501

El Banco de España al publicar esta serie pretende facilitar la difusión de estudios de interés que contribuyan al mejor conocimiento de la economía española.

Los análisis, opiniones y conclusiones de estas investigaciones representan las ideas de los autores, con las que no necesariamente coincide el Banco de España.

ISBN: 84-505-0989-0

Depósito legal: M. 2273 - 1985

Talleres Gráficos del Banco de España

Resumen

El objetivo del trabajo es mostrar como un uso casi elemental de los modelos ARIMA proporciona información importante sobre la estructura estocástica de series temporales, relevante y de utilidad para la predicción. Capturando movimientos en la tendencia y en la estacionalidad, se obtienen predicciones sensatas, a corto y medio plazo, para series aparentemente erráticas y difíciles de interpretar.

1. Introducción.-

Hablar de predicción de series temporales es un tanto equívoco. En definitiva es lo mismo que hablar de predicción sin más, sea cual sea la forma en que ésta se calcula. Con frecuencia, sin embargo, el término se emplea para caracterizar las predicciones obtenidas por medio de modelos que han surgido en el campo del llamado "análisis aplicado de series temporales", que tanta popularidad ha alcanzado desde la contribución de Box y Jenkins (1970). Nosotros consideraremos simplemente este tipo de predicciones. Una característica fundamental que la diferencia de las predicciones llamadas "económicas" (en su sentido clásico), es que los modelos de los que parten tienen una fundamentación estadística, y no económica. Mientras que, en un modelo económico, la estructura viene dada "a priori", supuestamente derivada de la teoría económica, un modelo de series temporales se infiere de los datos, dentro de una clase relativamente general de modelos, que permite reproducir relaciones dinámicas como las que empíricamente se observan en las series.

Es obvio que ambas propiedades (ajustarse a la evidencia empírica y ser consistente con la teoría económica) no deben ser antagónicas, sino simultáneas. Ambas son deseables. Sin embargo, la econometría clásica, desde el punto de vista de la predicción, ha sido víctima de dos problemas. Primero, al orientarse a modelos de ecuaciones simultáneas con gran número de variables (a veces miles), la especificación de la dinámica ha sido relegada a segundo término. En modelos grandes, sólo es posible -hoy por hoy- incorporar los esquemas dinámicos más simples y rudimentarios. Segundo, si el modelo económico viene, en principio, determinado por la teoría económica, no es de

extrañar que su estructura dinámica sea débil: la teoría económica nada nos dice sobre la dinámica de la economía.

Como consecuencia de esa insuficiencia en la especificación dinámica, los grandes modelos econométricos son de una pobreza predictiva considerable. En definitiva, la predicción es una extrapolación de la relación entre el presente y el pasado hacia la relación entre el futuro y el presente. Si la primera relación no está capturada, la predicción será poco fiable.

Es en este contexto, en mi opinión, donde se encuentra una de las razones básicas de la popularidad alcanzada por los modelos de series temporales. De la estructura dinámica de los datos (reflejada por ejemplo en la función de autocorrelación de la serie), se infiere un modelo que genera movimientos semejantes a los observados. En la medida en la que son modelos específicamente diseñados para capturar relaciones dinámicas, resultan muy adecuados para la predicción. Una virtud complementaria que presentan es que son modelos generalmente pequeños, de gran eficiencia computacional y facilidad de uso. Se han convertido, pues, en un instrumento fundamental en la elaboración de predicciones económicas. Su limitación, de todos modos, surge en dos terrenos: Por una parte, el tamaño de los modelos no permite el tratamiento conjunto de muchas variables (no es posible, por mucho que se simplifique su parametrización, utilizar modelos con, por ejemplo, 100 variables). Por otra parte, a veces no se puede -a partir del modelo de series temporales- recuperar los parámetros que son de interés para el economista (por ejemplo, separar parámetros de una función de oferta de los de una función de demanda), lo cual puede limitar su uso en problemas de política económica.

En relación con este último punto, tiene interés un último comentario general. Es importante integrar el análisis de series temporales con los modelos econométricos, y algunos pasos lentos se están dando en esta dirección (ver, por ejemplo, Sims, 1980, Litterman, 1982). Sabemos que, un modelo econométrico dinámico estructural tiene una forma reducida que puede verse como un modelo multivariante de series temporales del tipo ARIMA (Zellner-Palm, 1974). Sabemos también que un modelo multivariante ARIMA implica modelos ARIMA univariantes para las distintas series (ver Maravall, 1981). Lo que resulta más difícil es inferir la forma estructural del modelo econométrico a partir de los modelos ARIMA. En general, una infinidad de formas estructurales serían compatibles con un modelo ARIMA determinado. Estos pueden verse, pues, como formas reducidas, robustas frente a la especificación de la estructura, particularmente aptas para su uso en la predicción. Es de esperar que llegará un día en que modelos grandes, de fácil manejo, bien especificados y directamente interpretables en términos de teoría económica, y que reproduzcan bien la evolución de los datos en el tiempo, estarán disponibles. Hasta que llegue ese (lejano) día, los modelos de series temporales seguirán cumpliendo una función importante e insustituible.

En las páginas que siguen, describiremos brevemente los modelos de series temporales. En términos de su parametrización, nos ceñiremos a los modelos llamados ARIMA ("AutoRegressive Integrated Moving Average"), popularizados por Box y Jenkins, que representan sin duda la clase más importante de las que se utilizan en el trabajo aplicado. Veremos, después, un ejemplo sencillo que, en nuestra opinión, ilustra como un uso casi elemental de ARIMAS proporciona una información nada desdeñable.



2. Los Modelos ARIMA

Un modelo ARIMA representa una forma de modelizar, con unos pocos parámetros, un proceso estocástico lineal. Pueden racionalizarse teóricamente de la siguiente manera: Una serie temporal puede verse como una relación (parcial) concreta de un proceso estocástico. En condiciones bastante generales, un proceso estocástico estacionario puede representarse como una combinación lineal (media móvil) de una sucesión de variables aleatorias idéntica e independientemente distribuidas ("ruido blanco"), que se denominan innovaciones. Si $[z_t]$ representa el proceso estocástico, entonces:

$$z_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \quad (1)$$

donde a_t es ruido blanco y representa la innovación en t . Utilizando el operador de retardos B , tal que $B^j z_t = z_{t-j}$, z_t puede reescribirse:

$$z_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) a_t$$

o equivalentemente:

$$z_t = \psi(B) a_t \quad (2)$$

donde $\psi(B)$ es un polinomio en B , en general de orden infinito. Aproximando, pues, $\psi(B)$ por el cociente de dos polinomios de orden finito:

$$\psi(B) = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} \quad (3)$$

donde q y p representan los órdenes respectivos, de (2) y (3) se obtiene:

$$\phi_p(B) z_t = \theta_q(B) a_t \quad , \quad (4)$$

es decir:

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \dots - \phi_p z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad .(5)$$

El modelo (4) -o equivalentemente (5)- representa un proceso ARMA (p,q).

Esta puede ser una racionalización teórica. De todos modos, lo que ha dado a los procesos ARIMA su importancia es una razón empírica: que son fáciles de manejar y funcionan bien en la práctica.

Desde este punto de vista práctico, el modelo ARMA debe ser generalizado: el supuesto de estacionariedad es restrictivo e implica, entre otras cosas, una media constante en el tiempo. Sin embargo, las series económicas suelen presentar tendencias, que cambian el valor medio de la serie en el tiempo. Una forma computacionalmente muy sencilla de eliminar tendencias es mediante diferenciaciones de la serie. Si la serie necesita d diferenciaciones para convertirse en estacionaria, esto dá lugar a los procesos ARIMA (p,d,q), del tipo:

$$\phi_p(B) \nabla^d z_t = \theta_q(B) a_t \quad , \quad (6)$$

donde $\nabla = (1-B)$, y en general $\nabla_j = z_t - z_{t-j}$.

Las series económicas suelen presentar también variaciones estacionales importantes. Un modelo que resulta con frecuencia útil es el proceso ARIMA multiplicativo, donde

se supone que los polinomios de (6) pueden factorizarse en polinomios en B y en polinomios en B^s , donde s es el período asociado con la frecuencia estacional fundamental (por ejemplo, $s = 12$ para datos mensuales). El modelo ARIMA multiplicativo viene, en general, dado por una ecuación del tipo:

$$\phi_p(B^s) \phi_p(B) \nabla^d \nabla_s^D z_t = \theta_q(B^s) \theta_q(B) a_t ,$$

y se denomina abreviadamente, ARIMA $(p,d,q) \times (P,D,Q)_s$.

Representemos el modelo ARIMA en forma compacta como:

$$\phi(B) z_t = \theta(B) a_t \quad , \quad (7)$$

donde los dos polinomios en B pueden (o no) factorizarse en forma multiplicativa, y donde $\phi(B)$ puede (o no) incluir raíces unitarias no-estacionarias. Despejando a_t :

$$a_t = \theta(B)^{-1} \phi(B) z_t \quad ,$$

z_t puede representarse como un proceso autorregresivo puro (de orden ∞):

$$\pi(B) z_t = a_t \quad , \quad (8)$$

donde $\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z_{t-j}$ ($\pi_0 = 1$).

3. La Predicción

Sea $\hat{z}_t(j)$ la predicción de z_{t+j} hecha en t , cuando se dispone de la información $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \dots$. Si ésta se estima como la esperanza condicional en t de z_{t+j} , es decir:

$$\hat{z}_t(j) = E_t z_{t+j} .$$

Escribiendo (8) como:

$$z_t = (\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j z_{t-j}) + a_t ,$$

en $(t-1)$ todo el término entre paréntesis es conocido. Puesto que, al ser ruido blanco, $E_{t-1} a_t = 0$, la predicción de z_t hecha en $(t-1)$ viene dada por:

$$\hat{z}_{t-1}(1) = \sum \pi_j z_{t-j} .$$

y el error de predicción será:

$$z_t - \hat{z}_{t-1}(1) = a_t .$$

Es decir, las innovaciones (a_t) son la serie de errores de predicción un período por delante.

Esto proporciona una forma de calcular las innovaciones en el tiempo: manteniendo el historial de errores de predicción cometidos un período por delante. Así pues, en t conocemos también la serie $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, \dots$

Para ver en qué consisten las predicciones que dan los modelos ARIMA analizaremos un ejemplo. Se trata del modelo llamado "de las líneas aéreas", introducido por Box y

Jenkins, y que resulta razonable para muchas series. Su ecuación viene dada por:

$$\nabla \nabla_{12} z_t = (1-\theta_1 B)(1-\theta_{12} B^{12})a_t$$

ó:

$$z_t = z_{t-1} + z_{t-12} - z_{t-13} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_{12} a_{t-12} + \theta_1 \theta_{12} a_{t-13}$$

Puesto que:

$$E_t a_{t+j} = \begin{cases} 0 & \text{para } j > 0 \\ a_{t+j} & \text{para } j \leq 0 \end{cases}$$

se obtiene:

$$\hat{z}_t(1) = z_t + z_{t-11} - z_{t-12} - \theta_1 a_t - \theta_{12} a_{t-11} + \theta_1 \theta_{12} a_{t-12}$$

$$\hat{z}_t(2) = \hat{z}_t(1) + z_{t-10} - z_{t-11} - \theta_{12} a_{t-10} + \theta_1 \theta_{12} a_{t-11}$$

.

$$\hat{z}_t(13) = \hat{z}_t(12) + \hat{z}_t(1) - z_t + \theta_1 \theta_{12} a_t$$

Para $j > 13$,

$$\hat{z}_t(j) = \hat{z}_t(j-1) + \hat{z}_t(j-12) - \hat{z}_t(j-13)$$

es decir

$$\nabla \nabla_{12} \hat{z}_t(j) = 0 \quad (9)$$

donde el operador B implícito opera sobre j. La función de predicción eventual $\hat{z}_t(j)$ es, pues, la solución de la

ecuación en diferencias finitas (en j) dada por (9). Las raíces de esta ecuación son las raíces de $\nabla = 0$ (raíz unitaria real) y de $\nabla_{12} = 0$ (las doce raíces del círculo unitario). Las raíces totales son, por tanto, la raíz 1 doble, la raíz -1 , y cinco pares de complejos conjugados, asociados con las frecuencias 1, 2, 3, 4 y 5 veces al año. En consecuencia, la función de predicción será del tipo:

$$\hat{z}_t(j) = A_{1,t} + A_{2,t} j + B_{0,t} (-1)^j + \sum_{k=1}^5 B_{k,t} \left(\cos \frac{2\pi k}{12} j + C_{k,t} \right)$$

donde los coeficientes A, B y C representan un total de 13 parámetros, que se determinan por medio de 13 condiciones iniciales. Puesto que, al variar el momento de la predicción, variarán las condiciones iniciales, dichos parámetros variarán lentamente en el tiempo (de ahí el subíndice t). La función de predicción recoge, pues, una tendencia lineal (localmente) y variaciones estacionales de frecuencias 1, 2, 3, 4, 5 y 6 veces al año (esta última asociada con la raíz -1), con amplitudes y desfases suavemente cambiantes.

(Nótese que para un proceso ARIMA general, tal como (7), la función de predicción eventual, $\hat{z}_t(j)$ para $j > q$, satisfará la ecuación en diferencias finitas:

$$\phi(B) \hat{z}_t(j) = 0$$

donde B actúa sobre j . Dependiendo, por tanto, de las raíces del polinomio autorregresivo, la función será la suma de funciones exponenciales, polinomios en el tiempo, y movimientos sinusoidales, asociados o no a frecuencias estacionales).



4. Una Aplicación

Las series mensuales de comercio exterior español (exportaciones e importaciones) es bien sabido que resultan difíciles de interpretar. De un mes a otro dan saltos enormes, tal como indica el Cuadro 1, que contiene las tasas de crecimiento mes a mes (anualizadas y expresadas en tanto por cien) para 1983. Si en un mes la serie prácticamente desaparece, para el mes siguiente crecer a una tasa anual de más del 36.000%, es lógico que sea difícil, cada mes, saber donde estamos o hacia donde nos dirigimos. (Esto es particularmente cierto para las exportaciones, aunque las diferencias resultan muy amplificadas por la anualización). A priori, pues, intentar predecir estas series parece un ejercicio inútil. Veamos, sin embargo, que nos dice una aplicación casi trivial de los modelos ARIMA.

Simplificaremos al máximo la etapa previa de identificación de los modelos. Vimos ya que el modelo de las líneas aéreas explicaba una evolución tendencial y otra estacional de la serie. Las series de exportaciones e importaciones tienen claramente tendencia y también parecen presentar variaciones estacionales, sobre todo las exportaciones (Gráficos 1 y 2). Por lo tanto, estimaremos directamente para ambas el modelo de las líneas aéreas, opción de defecto en algunos programas de series temporales. Puesto que las oscilaciones en ambas series aumentan al aumentar el nivel, el modelo se estimó en ambos casos para los logaritmos. La transformación " $\nabla_{12} \nabla \log$ " implica, pues, que (aproximadamente), la diferencia anual de la tasa de crecimiento mensual transforma a la serie en estacionaria.

Cuadro 1

Tasas mensuales
(anualizadas), 1983

	Exportaciones	Importaciones
Ene.	-99.8	-96.1
Feb.	491.6	149.5
Mar.	7255.5	94.7
Abr.	-99.5	-39.8
May.	36268.0	296.2
Jun.	-75.9	-69.1
Jul.	-58.4	-46.9
Ago.	-88.0	-66.3
Sep.	511.6	-43.3
Oct.	214.9	575.6
Nov.	524.6	588.3
Dic.	74.1	412.0

Cuadro 2

Estimación ARIMA

	θ_1	θ_{12}	σ_a^2
Exportaciones	.843 (.052)	.641 (.075)	.134
Importaciones	.732 (.059)	.893 (.061)	.110

Gráfico 1

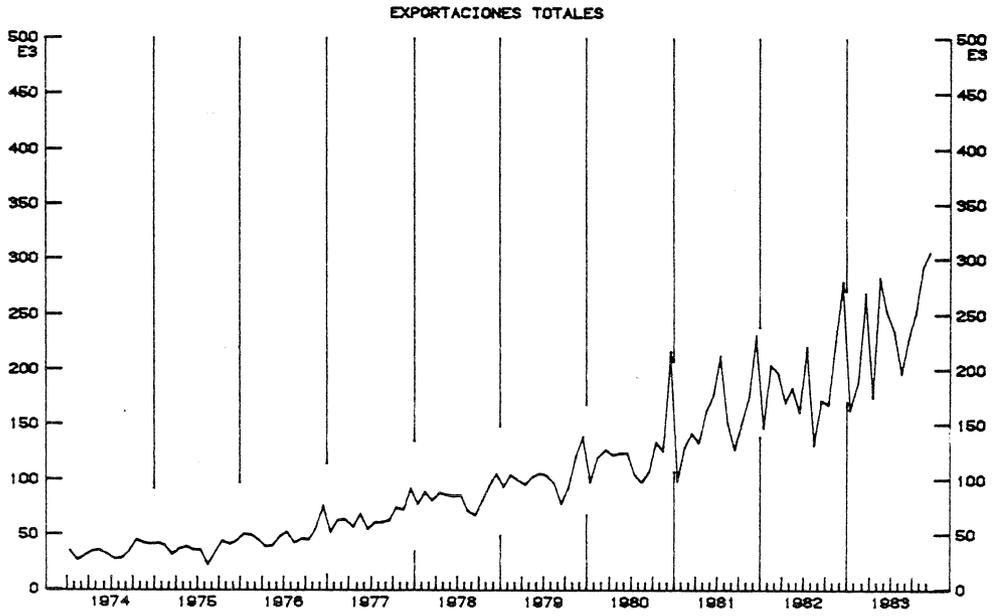
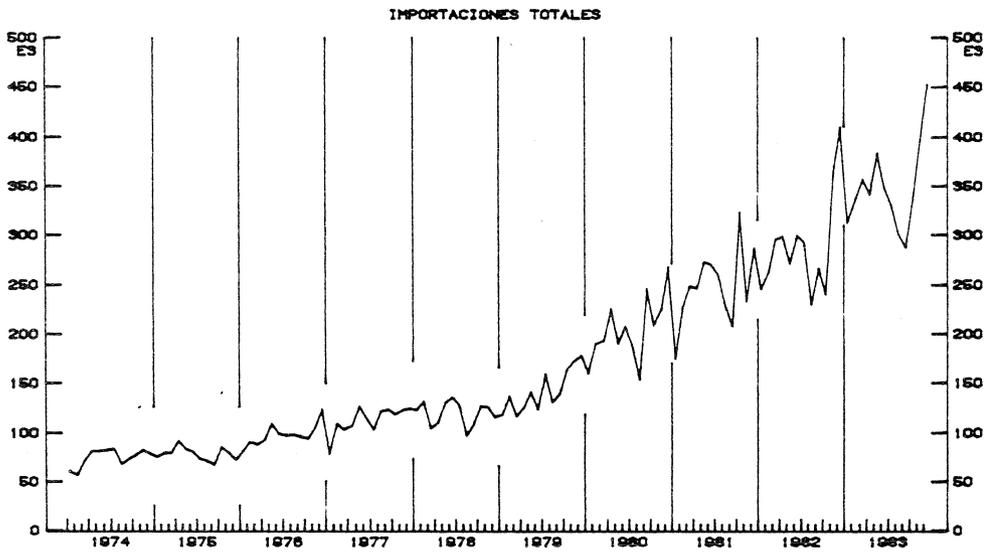


Gráfico 2



Los estimadores máximo-verosímiles de los parámetros de los dos modelos, para el período Enero 74-Diciembre 83, junto con los correspondientes errores estándar, se dan en el Cuadro 2. El modelo se ajusta razonablemente bien a las dos series, como evidencian las funciones de autocorrelación (FAC) de los residuos (Cuadro 3): las correlaciones significativas han desaparecido y los residuos se comportan como ruido blanco. La parte sistemática de la serie queda fundamentalmente capturada por el modelo y los residuos son impredecibles. (Un test sencillo para detectar situaciones en que residuos con FAC propia de ruido blanco pueden ser, sin embargo, predecibles, consiste en calcular la FAC de los residuos al cuadrado. Si el residuo no es ruido blanco surgirán en ésta correlaciones anormalmente altas. El Cuadro 4 contiene las FAC de los residuos al cuadrado para las dos series; en ambos casos la hipótesis de ruido blanco resulta aceptable).

En cuanto a la interpretación de los parámetros estimados, si en el modelo:

$$\nabla z_t = (1-\theta B)a_t + c ,$$

el valor de θ tiende a 1, integrando ambos lados de la ecuación resulta:

$$z_t = b + ct + a_t ,$$

es decir un valor de θ cercano a 1 evidencia la presencia de una tendencia casi determinística. Similarmente, si en:

$$\nabla_{12} z_t = (1-\theta_{12} B^{12})a_t ,$$

el valor de θ_{12} tiende a 1, integrando de nuevo, resulta:

FUNCION DE AUTOCORRELACION: Residuos

Exportaciones

AUTOCORRELATION FUNCTION

LAGS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	N*SUM R(K)**2 Q-STATISTIC	ERROR
1- 12	0.03	-0.04	-0.04	-0.02	0.06	0.03	-0.09	0.17	0.03	-0.09	-0.19	-0.11	12.620	0.09
13- 24	0.03	0.09	-0.07	0.06	-0.03	-0.08	-0.05	-0.12	-0.03	0.09	0.07	-0.06	19.459	0.10
25- 36	-0.04	-0.09	0.15	-0.07	-0.08	-0.01	-0.07	-0.02	-0.10	-0.17	0.06	0.08	31.332	0.11
MEAN	=	.18535D-02												
SUM OF SQUARES	=	2.1568												
VARIANCE	=	.18124D-01												
DURBIN-WATSON	=	1.924												

Importaciones

AUTOCORRELATION FUNCTION

LAGS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	N*SUM R(K)**2 Q-STATISTIC	ERROR
1- 12	-0.05	-0.05	0.18	-0.09	0.08	0.06	-0.18	0.02	0.04	-0.07	-0.01	-0.12	13.455	0.09
13- 24	0.19	-0.05	-0.13	0.02	-0.07	-0.04	0.03	-0.08	-0.04	0.02	-0.05	-0.07	23.012	0.10
25- 36	-0.12	0.08	0.04	-0.10	0.13	-0.18	-0.11	0.15	-0.02	-0.09	0.07	-0.02	38.870	0.11
MEAN	=	.20709D-02												
SUM OF SQUARES	=	1.4425												
VARIANCE	=	.12122D-01												
DURBIN-WATSON	=	2.090												

FUNCION DE AUTOCORRELACION: Residuos al cuadrado

Exportaciones

AUTOCORRELATION FUNCTION

LAGS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	N*SUM R(K)**2 Q-STATISTIC
1- 12	0.09	0.01	-0.07	-0.13	0.10	0.16	0.05	-0.01	-0.10	-0.03	0.09	0.02	10.850
13- 24	0.02	-0.05	-0.13	0.10	-0.09	0.00	0.00	-0.03	0.08	0.05	-0.11	-0.03	18.188
25- 36	-0.12	-0.05	-0.03	-0.06	-0.00	-0.12	-0.12	-0.02	-0.05	0.01	-0.06	-0.10	25.844

Importaciones

AUTOCORRELATION FUNCTION

LAGS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	N*SUM R(K)**2 Q-STATISTIC
1- 12	0.18	-0.13	-0.13	-0.02	-0.03	-0.12	0.02	-0.04	-0.07	-0.09	-0.06	0.07	12.767
13- 24	0.24	0.29	0.01	-0.11	-0.12	-0.05	0.01	0.00	-0.10	-0.05	0.04	-0.06	35.447
25- 36	0.13	0.08	0.17	-0.05	-0.05	0.13	-0.06	0.01	0.00	-0.03	-0.07	-0.06	46.157

$$z_t = \sum_{i=1}^{12} \beta_i d_{it} + a_t \quad .$$

donde las d_{it} son variables "dummy" estacionales. Es decir, valores de θ_{12} cercanos a 1 implican una estacionalidad muy estable. Mirando, pues, los valores de θ en el Cuadro 2, se observa que la serie de exportaciones presenta una tendencia más estable que la de importaciones, mientras que con la estacionalidad pasa lo contrario.

Por último, los valores de la desviación típica residual son elevados en ambos casos. Puesto que ésta representa la desviación típica del error de predicción (un período por delante), y puesto que el error de predicción de una serie en logaritmos es aproximadamente igual al cociente entre el error de predicción (en niveles) y el nivel de la serie, los valores de σ_a (multiplicados por 100) nos expresan directamente el error relativo (porcentual) con el que se predice la serie. La serie de exportaciones se predice, pues, con un error del 13% sobre el nivel, y la de importaciones con un error del 11%. Ambos resultan muy altos y cabría pensar que los modelos obtenidos no pueden ser de mucha ayuda en la predicción. En todo caso, la predicción un mes por delante podría tener algo de interés, pero quizás para períodos más largos los errores serían demasiado elevados.

Estimando el modelo para el período que termina en Diciembre 1981, se fueron calculando las predicciones (un período por delante) de ambas series para 1982 y 1983. El Cuadro 5 presenta la media y la desviación típica de los errores de predicción.

Cuadro 5

	Exp.	Imp.
μ	-.006	.013
σ	.142	.122

Las dos medias pueden considerarse cero y las desviaciones típicas están en consonancia con las correspondientes a los residuos antes estimados. Los Gráficos 3 y 4 presenta las predicciones obtenidas y los errores de predicción asociados. La predicción recoge claramente una cierta evolución en la tendencia y en la estacionalidad.

Pasando a predicciones a más largo plazo, veamos qué predicciones se obtienen cuando se utiliza el modelo para la predicción doce (y seis) meses por delante. Parando la serie en Diciembre 1982, se calcularon las funciones de predicción [$z_{\text{DIC } 82}(j)$, $j = 1, 2, \dots, 12$] para los 12 meses de 1983, el año que registró las erráticas tasas de crecimiento del Cuadro 1. El Gráfico 5 representa dichas funciones de predicción.

Consideremos la predicción del crecimiento de exportaciones e importaciones para el año completo 1983 en relación con el que habían experimentado en 1982. (Desde el punto de vista de política económica, la predicción de más interés es la del crecimiento de un año sobre el anterior). En Diciembre 1982 la predicción para 1983 era de un crecimiento del 22.2% para exportaciones y del 22.9% para importaciones (ver cuadro 6). Una vez transcurrido 1983, los crecimientos resultaron ser 25.7% y 20.5%, respectivamente.

Gráfico 3

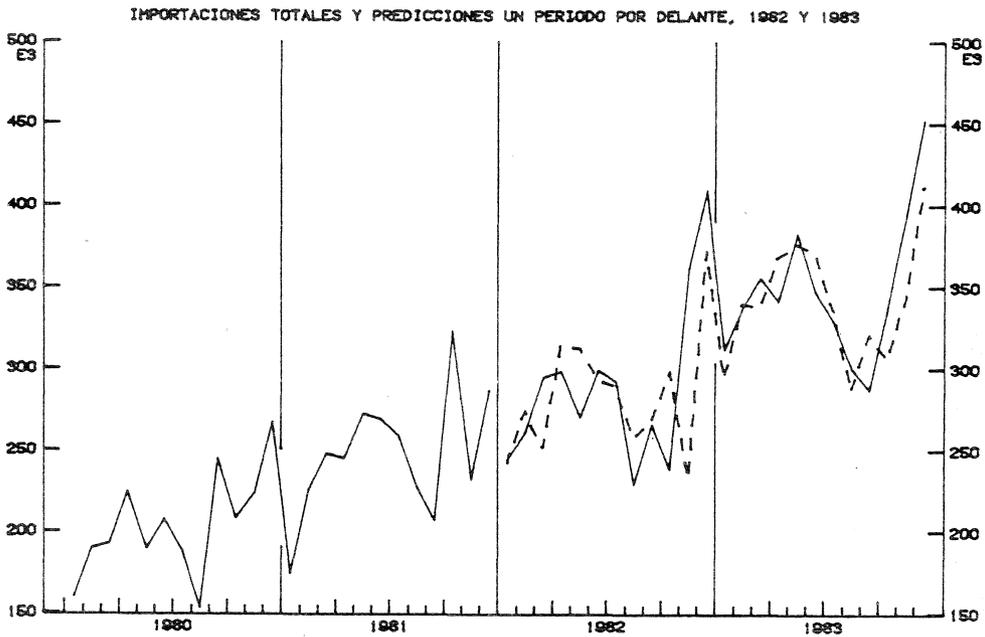
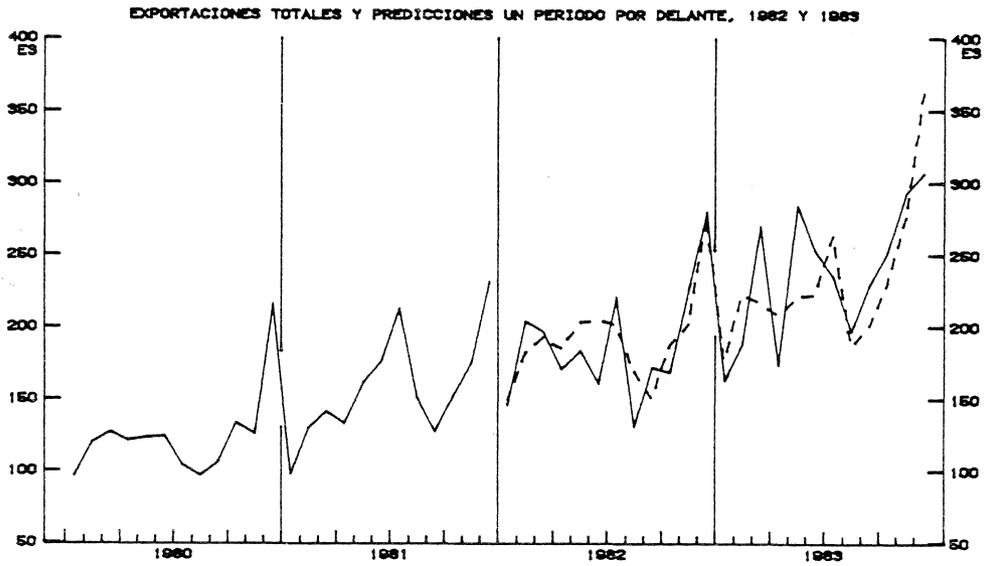


Gráfico 4

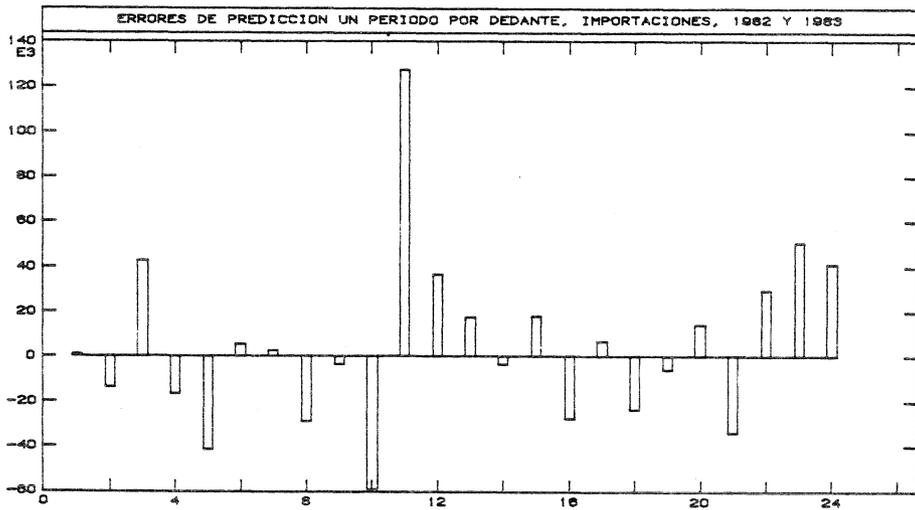
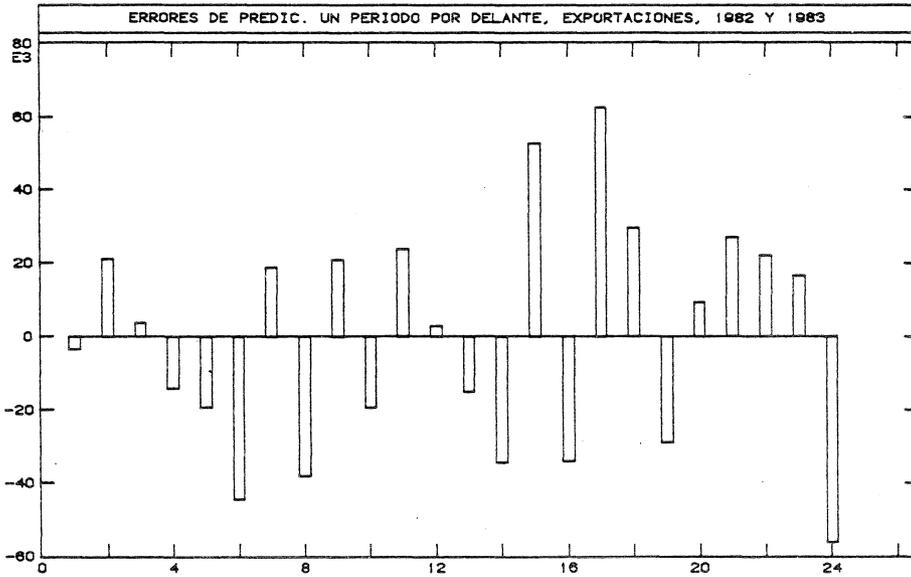
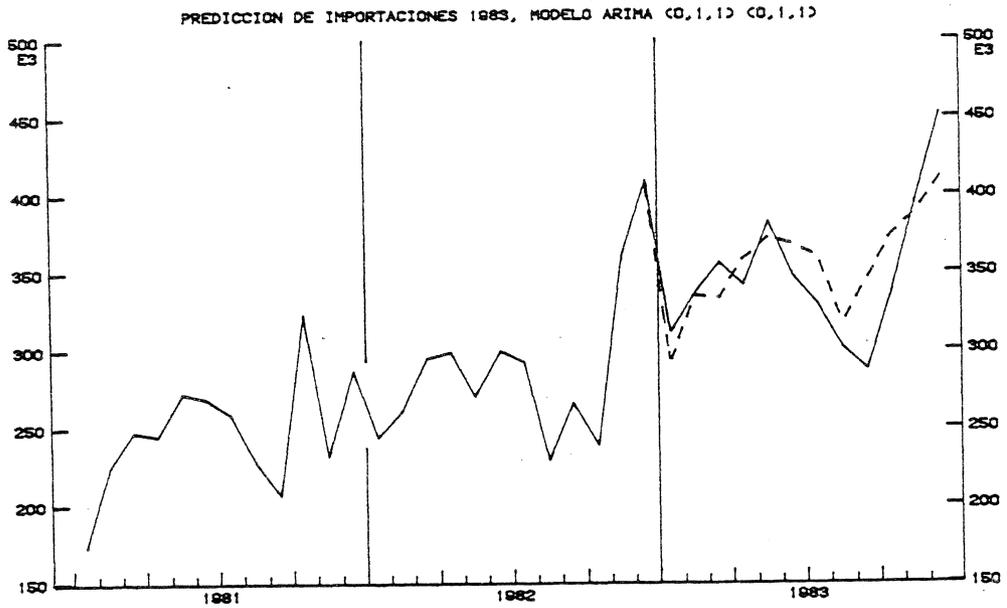
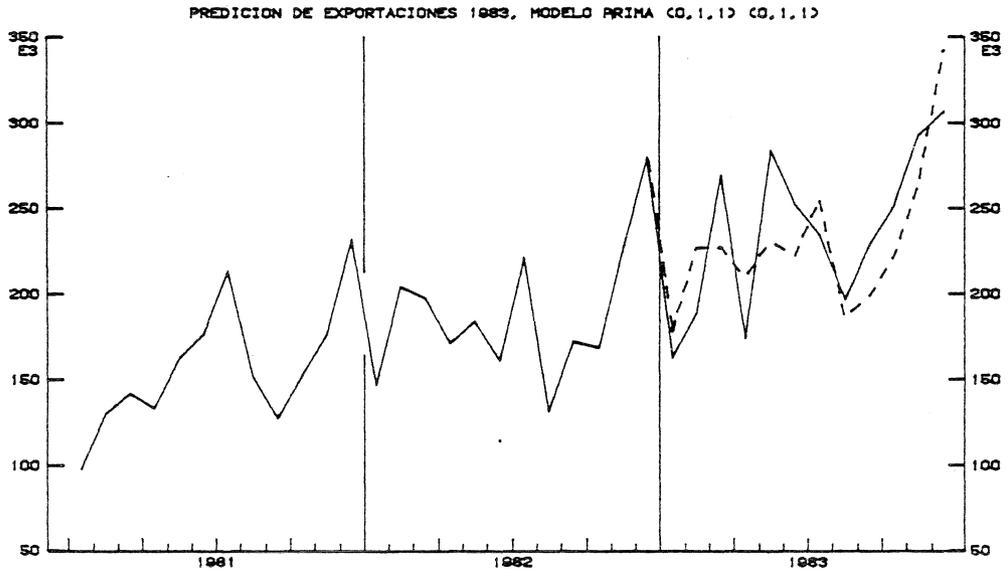


Gráfico 5



Considerando el horizonte implícito en la predicción (hasta 12 meses) y el comportamiento errático de las series durante 1983, las dos predicciones resultan sorprendentemente razonables. Y una vez transcurrido medio año, las predicciones del crecimiento de 1983 sobre 1982 realizadas en Junio del 83 fueron del 23.8% para exportaciones y del 21.1% para importaciones. Ambas, pues, mejoran considerablemente.

Cuadro 6

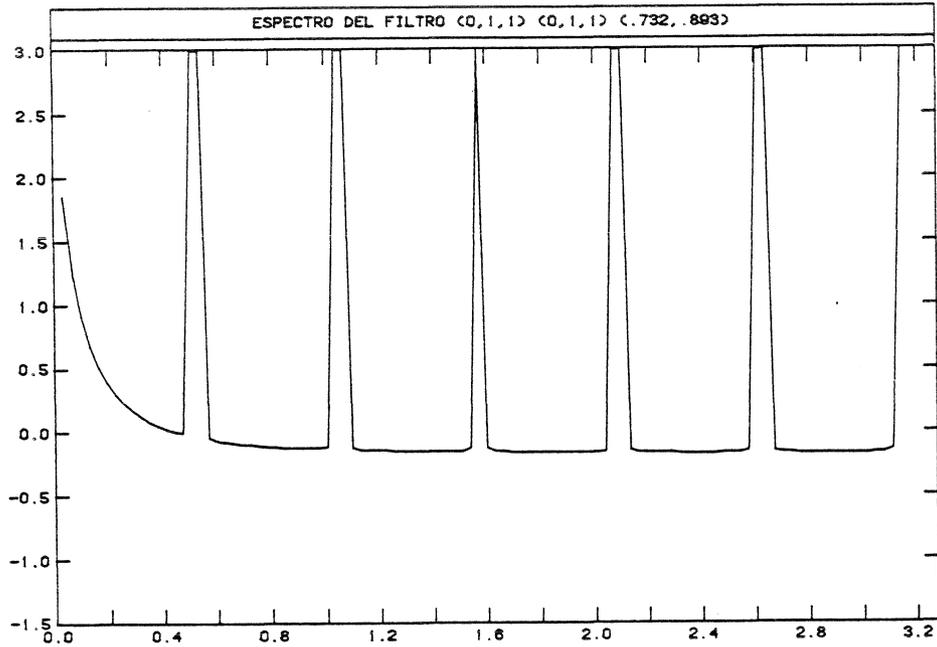
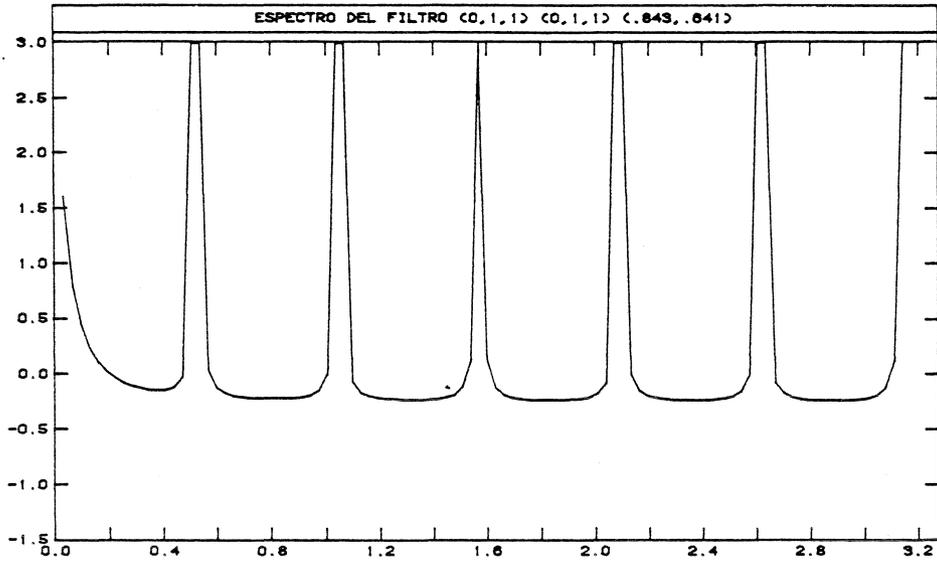
Crecimiento de 1983 sobre 1982

	Predicción en Dic. 1982	Predicción en Jun. 1983	Crecimiento observado
Exportaciones	22.16	23.83	25.71
Importaciones	22.94	21.17	20.51

Este ejemplo parece contradecir la opinión que a veces se expresa de que los modelos ARIMA sólo sirven para predecir a muy corto plazo. De todos modos ¿cómo se explica que unas series tan erráticas se predigan a plazo relativamente largo en forma tan sensata? Veremos a continuación que existe una sencilla explicación, íntimamente ligada a la estructura dinámica de las propias series.

Como ya mencionamos, la función de predicción constaba de la evolución de una tendencia y unos movimientos estacionales. El Gráfico 6 representa los pseudo-espectros:

Gráfico 6



$$g_z(\omega) = \left| \frac{(1-\theta_{11} e^{i\omega}) (1-\theta_{12} e^{i12\omega})}{(1-e^{i\omega}) (1-e^{i12\omega})} \right|^2 \sigma_a^2$$

para los dos modelos ARIMA estimados (y los valores de los parámetros del Cuadro 2). El área bajo $g_z(\omega)$ en las cercanías de $\omega = 0$ se asociará con movimiento tendencial, y el área bajo $g_z(\omega)$ en las cercanías de frecuencias

estacionales ($\omega = \frac{\pi}{6}j$, $j = 1, \dots, 6$) se asociará con

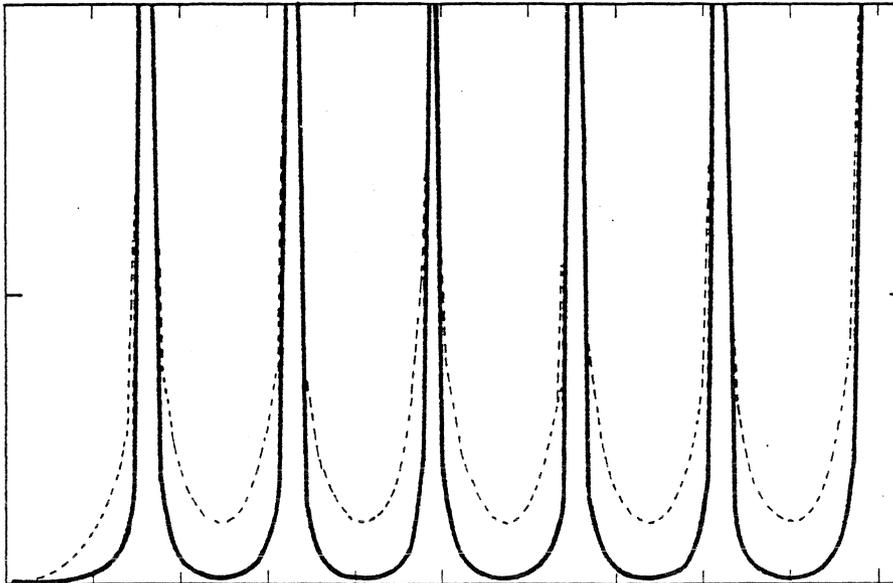
movimientos estacionales. En los últimos años se ha investigado la descomposición en tendencia/estacionalidad/componente irregular de modelos ARIMA (ver Burman, 1980, Bell-Hillmer, 1984 y Pierce-Maravall, 1984). Para los modelos de las líneas aéreas que nos ocupan estos componentes siguen los modelos:

1. Tendencia: $\nabla^2 p_t = (1+B)(1-\alpha B)c_t$
2. Estacional: $(1+B+\dots+B^6)s_t = (1-B)\beta(B)b_t$
3. Irregular: $u_t \sim$ ruido blanco ,

donde c_t , b_t y u_t son independientes, y $\beta(B)$ es una media móvil de orden 10. Los pseudoespectros de los componentes aparecen representados en los Gráficos 7 y 8: $g_p(\omega)$ y $g_s(\omega)$ presentan un cero para $\omega=\pi$ y $\omega=0$, respectivamente, y los gráficos indican claramente la mayor estabilidad de la tendencia de las exportaciones y la mayor estabilidad de la estacionalidad en las importaciones. En cuanto al irregular, viene a representar aproximadamente el 8% del nivel en ambas series. La estimación de los tres componentes en las dos series figura en el Gráfico 9.

Gráfico 7

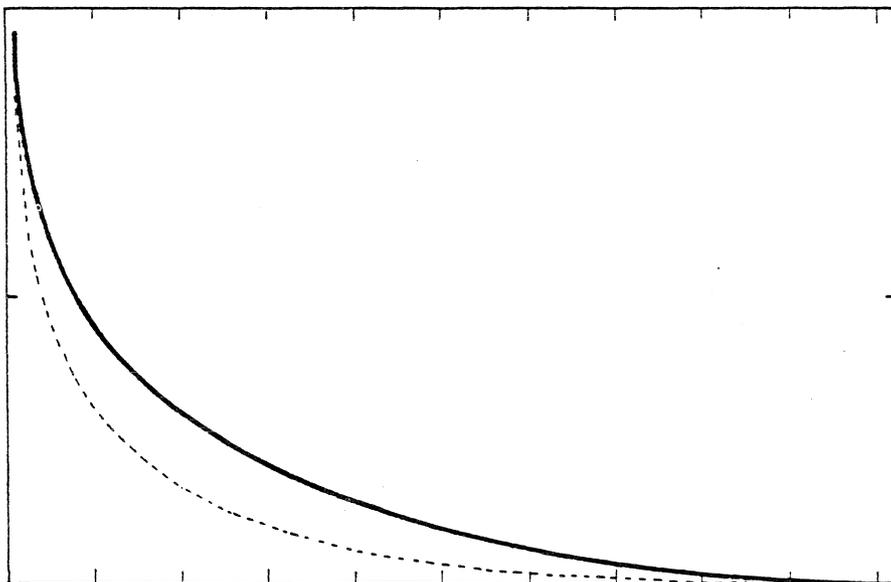
ESPECTRO: Componente Estacional



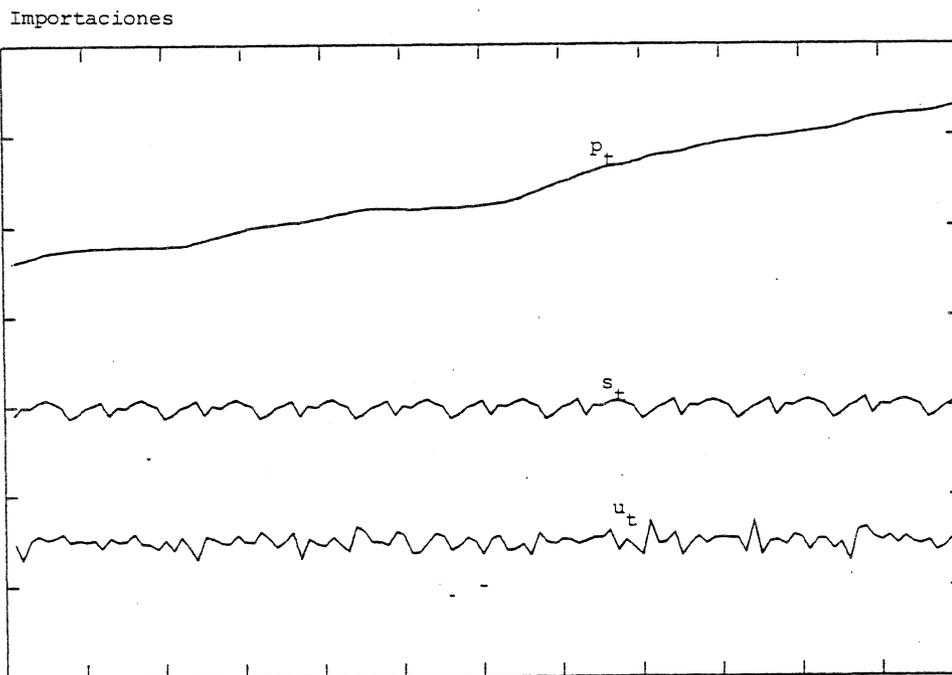
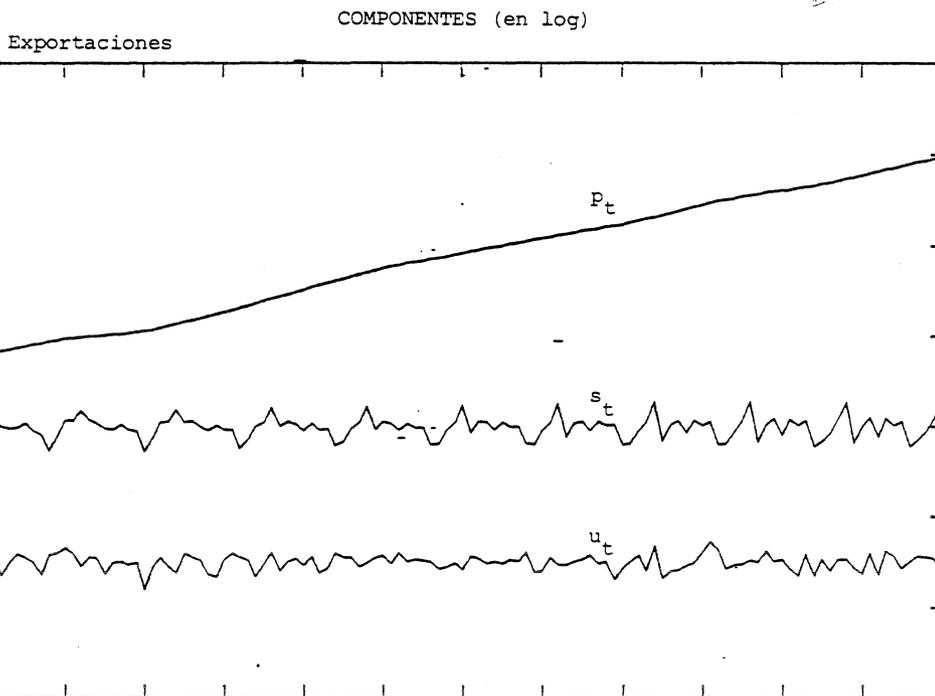
--- Export.
— Import.

Gráfico 8

ESPECTRO: Tendencia



--- Export.
— Import.



Fijándonos en el irregular, las FAC del componente estimado para cada serie aparece en el Cuadro 7. Descontando los valores negativos alrededor de los retardos bajos y estacionales, asociados con la estimación óptima mínimo cuadrática, ambos se comportan como movimientos erráticos, con media cero, semejantes a ruido blanco. El irregular será, pues, impredecible y representa un porcentaje relativamente alto del error de predicción (un 66% para las exportaciones y un 76% para las importaciones, aproximadamente). El resto del error de predicción va asociado al carácter estocástico (móvil) de la tendencia y de la estacionalidad, que no son perfectamente predecibles (ver Maravall, 1984). Pero una característica de los movimientos irregulares es que, al representar movimientos erráticos transitorios (que oscilan alrededor de cero), a lo largo de un período relativamente amplio, tienden a autocancelarse (ver Gráfico 10). Así, la media del irregular en 1983 para las exportaciones es $-.004$ y para las importaciones $-.002$. Su efecto, pues, a lo largo de un período amplio, es reducido, y el comportamiento estocástico de ambas series a lo largo del tiempo es más estable de lo que a primera vista parece. Es, por tanto, razonable que las predicciones para un año y para 6 meses, tal como vimos, estén menos afectadas por la erraticidad y se ajusten relativamente bien al crecimiento promedio de la serie.

FUNCION DE AUTOCORRELACION: Irregular

Exportaciones

AUTOCORRELATION FUNCTION

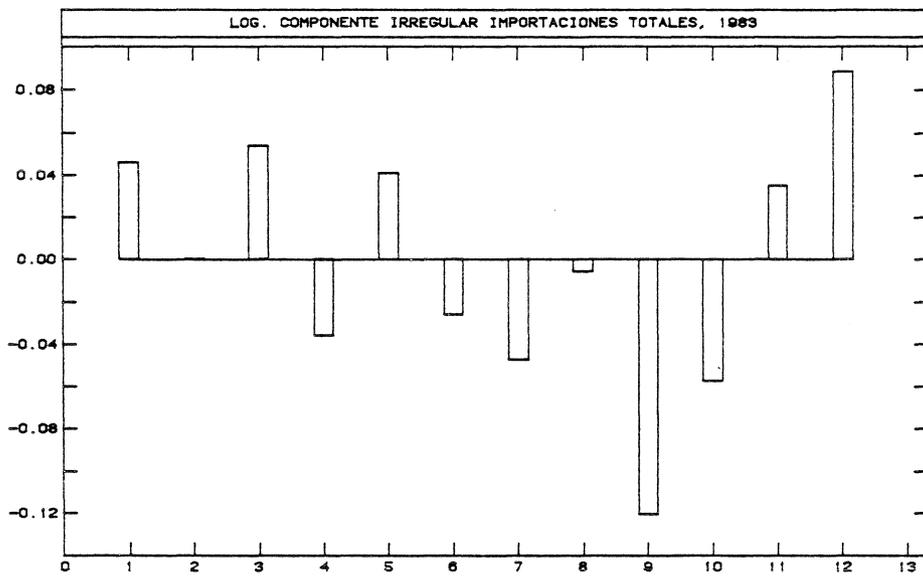
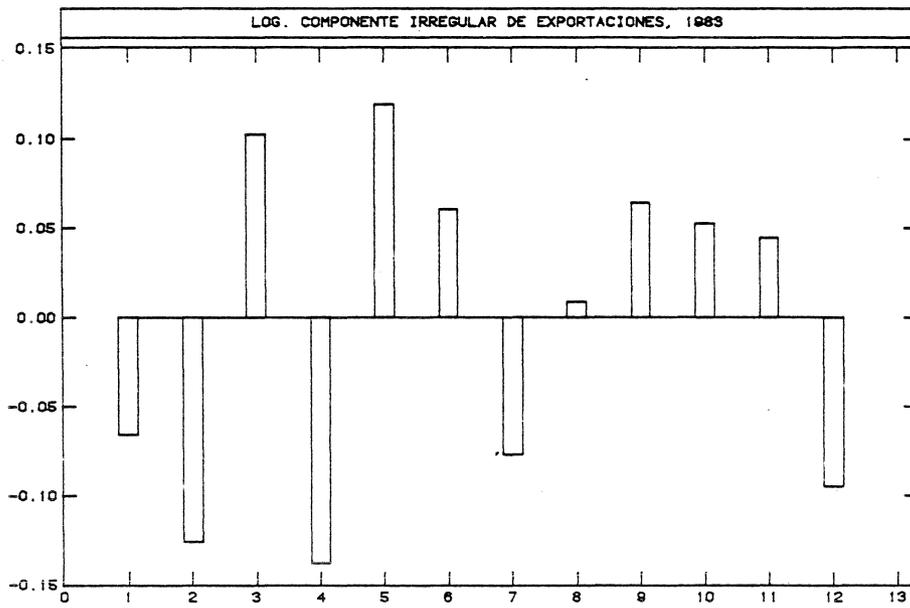
LAGS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	N*SUM R(K)**2 Q-STATISTIC	ERROR
1- 12	-0.02	-0.09	-0.11	-0.09	0.07	0.03	-0.11	0.20	0.03	-0.08	-0.21	-0.26	24.120	0.09
13- 24	0.07	0.15	-0.09	0.08	0.01	-0.06	-0.01	-0.12	-0.01	0.15	0.12	-0.14	37.753	0.11
25- 36	-0.02	-0.06	0.18	-0.08	-0.06	0.03	-0.04	0.03	-0.10	-0.18	0.09	0.06	49.984	0.12
MEAN	=	-.37871D-02												
SUM OF SQUARES	=	.92033												
VARIANCE	=	.77339D-02												
DURBIN-WATSON	=	2.029												

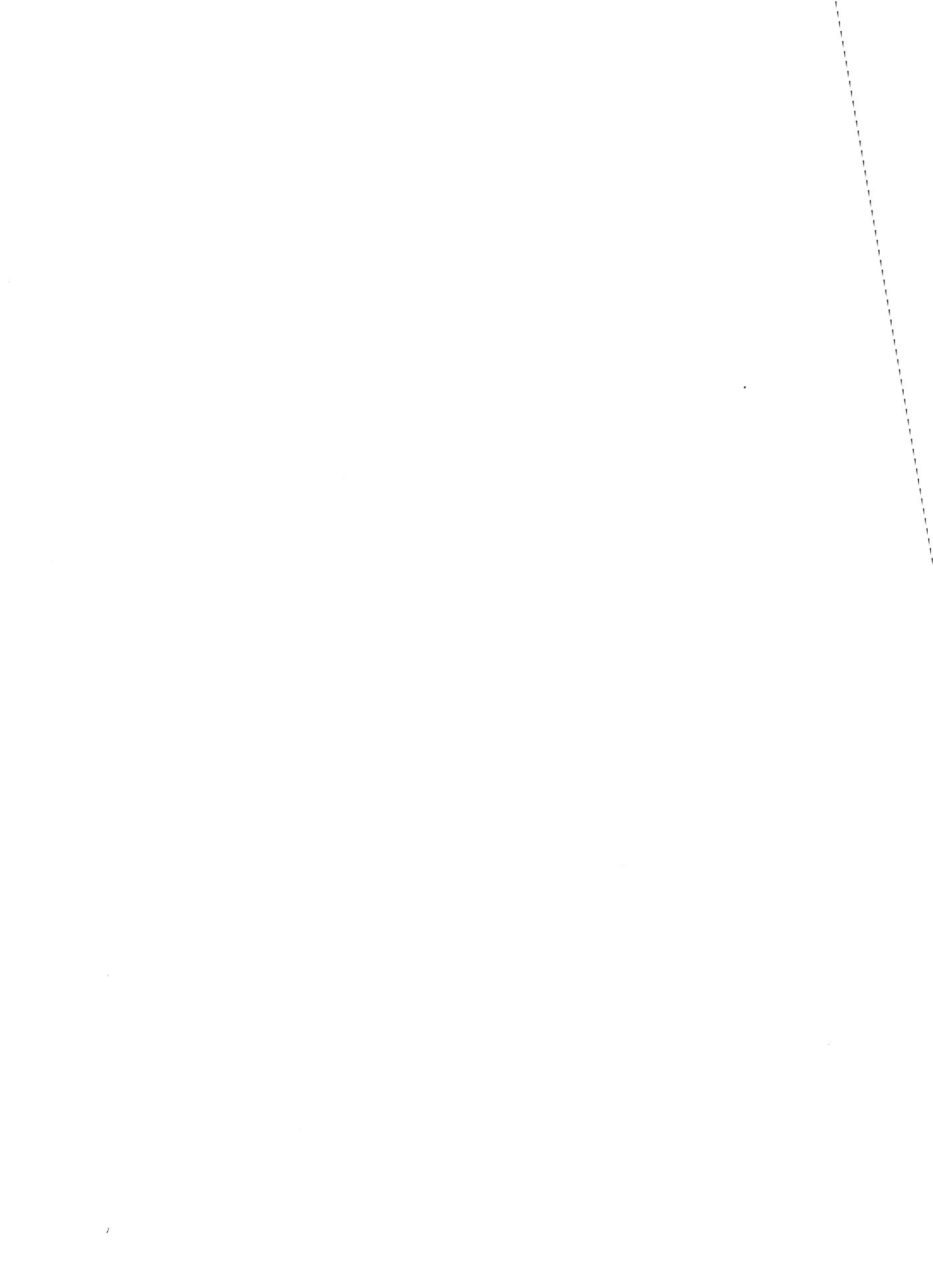
Importaciones

AUTOCORRELATION FUNCTION

LAGS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	N*SUM R(K)**2 Q-STATISTIC	ERROR
1- 12	-0.19	-0.16	0.13	-0.16	0.06	0.06	-0.21	0.03	0.05	-0.06	0.01	-0.15	22.445	0.09
13- 24	0.24	-0.04	-0.13	0.05	-0.04	-0.01	0.07	-0.06	-0.01	0.05	-0.02	-0.05	33.683	0.11
25- 36	-0.11	0.12	0.06	-0.10	0.17	-0.19	-0.11	0.19	-0.03	-0.11	0.06	-0.06	54.395	0.11
MEAN	=	-.34266D-02												
SUM OF SQUARES	=	.82648												
VARIANCE	=	.69453D-02												
DURBIN-WATSON	=	2.376												

Gráfico 10





5. Sensibilidad del Resultado a la Especificación del Modelo.

En el análisis de series temporales la primera etapa es la identificación del modelo a utilizar. Nosotros prácticamente nos saltamos esta etapa y decidimos utilizar el modelo de las líneas aéreas para ambas series. Se plantea, pues, la cuestión de si especificaciones distintas del modelo hubieran alterado mucho los resultados. Ilustraremos la discusión con la serie de exportaciones.

Para el período Enero 74-Diciembre 82, la transformación que minimiza la varianza viene dada por:

$$z_t = \nabla_{12} \log x_t$$

y la FAC de z_t no presenta evidencia clara de no-estacionariedad. Contiene una correlación de orden 1 igual .28 y una de orden 12 igual a -.34. La segunda se capta sin problema mediante una media móvil del tipo $(1-\theta_{12} B^{12})a_t$. La (relativamente pequeña correlación de orden 1, como es sabido, puede capturarse por medio de un AR(1), de un MA(1) o de un ARMA(1,1) con valores cercanos de ϕ y θ . Haciendo $b_t = (1-\theta_{12} B^{12})a_t$, se estimaron los modelos:

$$(A) (1-\phi_1 B)z_t = b_t + c$$

$$(B) z_t = (1-\theta_1 B)b_t + c$$

$$(C) (1-\phi_1 B)z_t = (1-\theta_1 B)b_t + c$$

además del modelo de las líneas aéreas, que denominaremos (D). Los resultados de la estimación figuran en el Cuadro 8. Se aprecia que el estimador θ_{12} apenas cambia, que las

desviaciones típicas residuales son también muy parecidas, y que las FAC de los residuos son en todos los casos parecidas a la propia de ruido blanco, como evidencian los valores del estadístico Q_{24} . (La dificultad de discriminar entre los 4 modelos se comprende si se observa la función de verosimilitud para (C) -Gráfico 11-, que resulta muy plana en la dirección $\phi \approx \theta + .2$).

Las funciones de predicción para 1983 asociadas con los 4 modelos aparecen representadas en el Gráfico 12. La similaridad entre ellas resulta evidente. Se observa, pues, que la función de predicción es relativamente insensible a alteraciones (no drásticas) en la especificación del modelo ARIMA.

Cuadro 8

Resultados de la Estimación

Modelo	ϕ_1	θ_1	θ_{12}	σ_a	Q_{24}
A	.240	-	.606	.138	19.4
B	-	-.207	.601	.133	21.0
C	.811	.643	.604	.131	20.2
D	1	.833	.625	.135	20.0

Gráfico 11

FUNCION DE VEROSIMILITUD

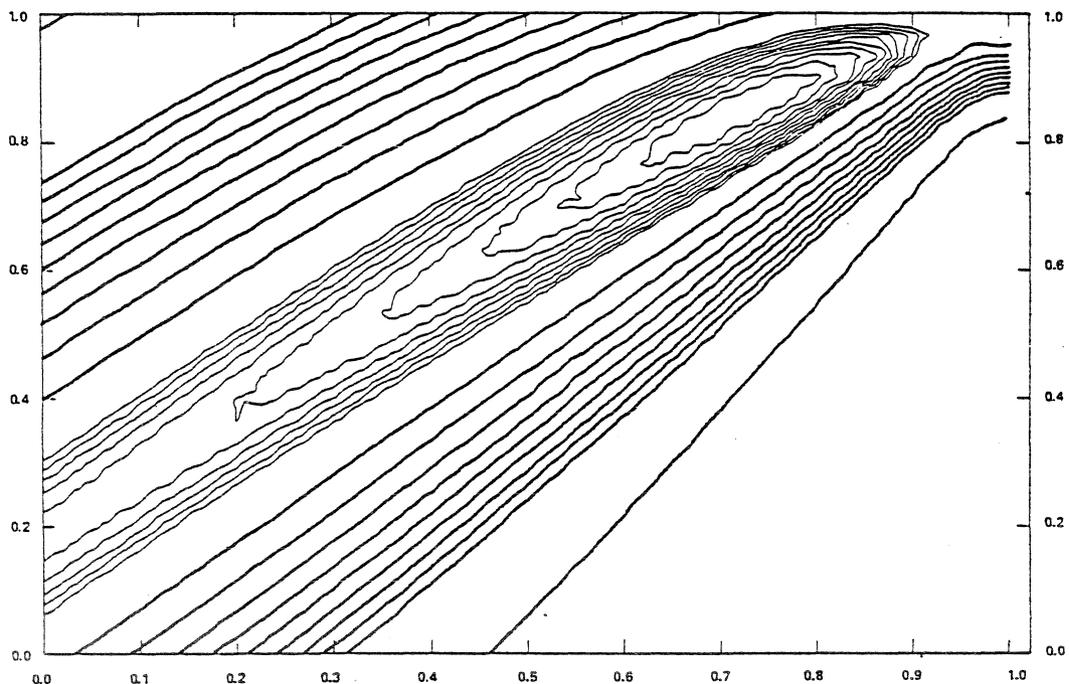
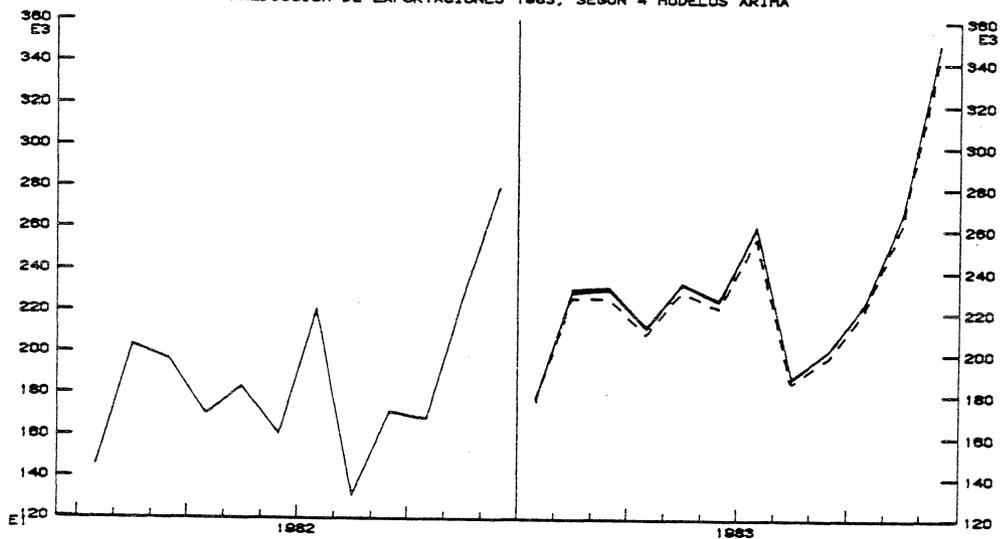


Gráfico 12

PREDICION DE EXPORTACIONES 1983, SEGUN 4 MODELOS ARIMA



6. Conclusión

El objetivo que perseguíamos era mostrar como un uso sencillo de los modelos ARIMA nos proporciona información importante sobre la estructura estocástica de series temporales relevante y de utilidad para la predicción. Hemos visto como, capturando movimientos en la tendencia y en la estacionalidad, es posible obtener predicciones sensatas para series que aparentemente siguen una evolución errática y difícil de interpretar.

Por supuesto, el análisis de series temporales permite incorporar una sofisticación mucho mayor en los modelos. Sucesos o efectos especiales pueden capturarse mediante el llamado análisis de intervención (Box-Tiao, 1975), influencias de variables exógenas pueden modelizarse por medio de funciones de transferencia (Jenkins, 1979) y, en general, es posible utilizar modelos multivariantes, más poderosos (Tiao-Box, 1981). También es posible incorporar elementos no lineales mediante extensiones bilineales y otras (Maravall, 1983). Una referencia excelente sobre aplicaciones del análisis de series temporales en economía está contenida en el volumen Zellner (1983). Pero lo que nosotros hemos pretendido ilustrar no era un uso complejo de los modelos de series temporales, sino una aplicación casi trivial, que mostrase cómo, con muy poco coste, se obtiene información importante. En este sentido (el de, por llamarlo de algún modo, la relación beneficio-coste), desde el punto de vista de la predicción, los modelos de series temporales resultan hoy por hoy insustituibles.



REFERENCIAS

- Bell, W.R. y Hillmer, S.C. (1984), "Issues Involved with the Seasonal Adjustment of Economic Time Series", Journal of Business and Economic Statistics, 2,4.
- Box, G.E.P. y Jenkins, G.M. (1970). Time Series Analysis: Forecasting and Control, Holden Day, San Francisco, 1970.
- Box, G.E.P. y Tiao, G.C. (1975), "Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems", Journal of the American Statistical Association, 70, 70.
- Burman, J.P. (1980), "Seasonal Adjustment by Signal Extraction", Journal of the Royal Statistical Society, A, 143, 321-337.
- Jenkins, G.M. (1979), Practical Experiences with Modelling and Forecasting Time Series, GJP Pub.
- Litterman, R.B. (1982), "Optimal Control of the Money Supply" NBER Working Paper 912.
- Maravall, A. (1981), "A Note on Identification of Multivariate Time Series Models", Journal of Econometrics, 16, 237-247.
- Maravall, A. (1983), "An Application of Non-linear Time Series Forecasting" Journal of Business and Economic Statistics, 1.1.

- Maravall, A. (1984), "A Model Based Treatment of a Manic Depressive Series", in Statistics and Computing, North-Holland Pu. Co.
- Pierce, D.A. y Maravall, A. (1984), "Advances in Model-Based Seasonal Adjustment", Proceedings of the American Statistical Association.
- Sims, C.A. (1980), "Macroeconomics and Reality", Econometrica 48, 1-48.
- Tiao, G.C. y Box, G.E.P. (1981) "Modelling Multiple Time Series With Applications", Journal of the American Statistical Association, 76, 802-816.
- Zellner, A. y Palm, F. (1974), "Time Series Analysis and Simultaneous Equation Econometric Models", Journal of Econometrics, 2, 17-54.
- Zellner, A., Editor (1983), Applied Time Series Analysis of Economic Data, U.S. Department of Commerce-Bureau of the Census.

DOCUMENTOS DE TRABAJO:

- 7801 **Vicente Poveda y Ricardo Sanz:** Análisis de regresión: algunas consideraciones útiles para el trabajo empírico (*).
- 7802 **Julio Rodríguez López:** El PIB trimestral de España, 1958-1975. Avance de cifras y comentarios (*). (Publicadas nuevas versiones en Documentos de Trabajo núms. 8211 y 8301).
- 7803 **Antoni Espasa:** El paro registrado no agrícola 1964-1976: un ejercicio de análisis estadístico univariante de series económicas (*). (Publicado en Estudios Económicos n.º 15).
- 7804 **Pedro Martínez Méndez y Raimundo Poveda Anadón:** Propuestas para una reforma del sistema financiero.
- 7805 **Gonzalo Gil:** Política monetaria y sistema financiero. Respuestas al cuestionario de la CEE sobre el sistema financiero español (*). Reeditado con el número 8001.
- 7806 **Ricardo Sanz:** Modelización del índice de producción industrial y su relación con el consumo de energía eléctrica.
- 7807 **Luis Angel Rojo y Gonzalo Gil:** España y la CEE. Aspectos monetarios y financieros (*).
- 7901 **Antoni Espasa:** Modelos ARIMA univariantes, con análisis de intervención para las series de agregados monetarios (saldos medios mensuales) M_3 y M_2 .
- 7902 **Ricardo Sanz:** Comportamiento del público ante el efectivo (*).
- 7903 **Nicolás Sánchez-Albornoz:** Los precios del vino en España, 1861-1890. Volumen I: Crítica de la fuente.
- 7904 **Nicolás Sánchez-Albornoz:** Los precios del vino en España, 1861-1890. Volumen II: Series provinciales.
- 7905 **Antoni Espasa:** Un modelo diario para la serie de depósitos en la Banca: primeros resultados y estimación de los efectos de las huelgas de febrero de 1979.
- 7906 **Agustín Maravall:** Sobre la identificación de series temporales multivariantes.
- 7907 **Pedro Martínez Méndez:** Los tipos de interés del Mercado Interbancario.
- 7908 **Traducción de E. Giménez-Arnau:** Board of Governors of the Federal Reserve System-Regulations AA-D-K-L-N-O-Q (*).
- 7909 **Agustín Maravall:** Effects of alternative seasonal adjustment procedures on monetary policy.
- 8001 **Gonzalo Gil:** Política monetaria y sistema financiero. Respuestas al cuestionario de la CEE sobre el sistema financiero español (*).
- 8002 **Traducción de E. Giménez-Arnau:** Empresas propietarias del Banco. Bank Holding Company Act-Regulation «Y» (*).
- 8003 **David A. Pierce, Darrel W. Parke, and William P. Cleveland, Federal Reserve Board and Agustín Maravall, Bank of Spain:** Uncertainty in the monetary aggregates: Sources, measurement and policy effects.
- 8004 **Gonzalo Gil:** Sistema financiero español (*). (Publicada una versión actualizada en Estudios Económicos n.º 29).
- 8005 **Pedro Martínez Méndez:** Monetary control by control of the monetary base: The Spanish experience (la versión al español se ha publicado como Estudio Económico n.º 20).
- 8101 **Agustín Maravall, Bank of Spain and David A. Pierce, Federal Reserve Board:** Errors in preliminary money stock data and monetary aggregate targeting.
- 8102 **Antoni Espasa:** La estimación de los componentes tendencial y cíclico de los indicadores económicos.
- 8103 **Agustín Maravall:** Factores estacionales de los componentes de M_3 . Proyecciones para 1981 y revisiones, 1977-1980.
- 8104 **Servicio de Estudios:** Normas relativas a las operaciones bancarias internacionales en España.
- 8105 **Antoni Espasa:** Comentarios a la modelización univariante de un conjunto de series de la economía española.
- 8201 **Antoni Espasa:** El comportamiento de series económicas: Movimientos atípicos y relaciones a corto y largo plazo.
- 8202 **Pedro Martínez Méndez e Ignacio Garrido:** Rendimientos y costes financieros en el Mercado Bursátil de Letras.

- 8203 **José Manuel Olarra y Pedro Martínez Méndez:** La Deuda Pública y la Ley General Presupuestaria.
- 8204 **Agustín Maravall:** On the political economy of seasonal adjustment and the use of univariate time-series methods.
- 8205 **Agustín Maravall:** An application of nonlinear time series forecasting.
- 8206 **Ricardo Sanz:** Evaluación del impacto inflacionista de las alzas salariales sobre la economía española en base a las tablas input-output.
- 8207 **Ricardo Sanz y Julio Segura:** Requerimientos energéticos y efectos del alza del precio del petróleo en la economía española.
- 8208 **Ricardo Sanz:** Elasticidades de los precios españoles ante alzas de diferentes inputs.
- 8209 **Juan José Dolado:** Equivalencia de los tests del multiplicador de Lagrange y F de exclusión de parámetros en el caso de contrastación de perturbaciones heterocedásticas.
- 8210 **Ricardo Sanz:** Desagregación temporal de series económicas (*).
- 8211 **Julio Rodríguez y Ricardo Sanz:** Trimestralización del producto interior bruto por ramas de actividad. (Véase Documento de Trabajo n.º 8301).
- 8212 **Servicio de Estudios. Estadística:** Mercado de valores: Administraciones Públicas. Series históricas (1962-1981).
- 8213 **Antoni Espasa:** Una estimación de los cambios en la tendencia del PIB no agrícola, 1964-1981.
- 8214 **Antoni Espasa:** Problemas y enfoques en la predicción de los tipos de interés.
- 8215 **Juan José Dolado:** Modelización de la demanda de efectivo en España (1967-1980).
- 8216 **Juan José Dolado:** Contrastación de hipótesis no anidadas en el caso de la demanda de dinero en España.
- 8301 **Ricardo Sanz:** Trimestralización del PIB por ramas de actividad series revisadas
- 8302 **Cuestionario OCDE. Servicio de Estudios. Estadística.** Cuadro de flujos financieros de la economía española (1971-1981) (*).
- 8303 **José María Bonilla Herrera y Juan José Camio de Allo:** El comercio mundial y el comercio exterior de España en el período 1970-1981: Algunos rasgos básicos.
- 8304 **Elóisa Ortega:** Índice de precios al consumo e índice de precios percibidos.
- 8305 **Servicio de Estudios. Estadística:** Mercado de Valores: Instituciones financieras. Renta fija. Series históricas (1962-1982).
- 8306 **Antoni Espasa:** Deterministic and stochastic seasonality: an univariate study of the Spanish Industrial Production Index.
- 8307 **Agustín Maravall:** Identificación de modelos dinámicos con errores en las variables.
- 8308 **Agustín Maravall, Bank of Spain and David A. Pierce, Federal Reserve Board:** The transmission of data noise into policy noise in monetary control.
- 8309 **Agustín Maravall:** Depresión, euforia y el tratamiento de series maníaco-depresivas: el caso de las exportaciones españolas.
- 8310 **Antoni Espasa:** An econometric study of a monthly indicator of economic activity.
- 8311 **Juan José Dolado:** Neutralidad monetaria y expectativas racionales: Alguna evidencia en el caso de España.
- 8312 **Ricardo Sanz:** Análisis cíclicos. Aplicación al ciclo industrial español.
- 8313 **Ricardo Sanz:** Temporal disaggregation methods of economic time series.
- 8314 **Ramón Galián Jiménez:** La función de autocorrelación extendida: Su utilización en la construcción de modelos para series temporales económicas.
- 8401 **Antoni Espasa y María Luisa Rojo:** La descomposición del indicador mensual de cartera de pedidos en función de sus variantes explicativas.
- 8402 **Antoni Espasa:** A quantitative study of the rate of change in Spanish employment.
- 8403 **Servicio de Producción y Demanda Interna:** Trimestralización del PIB por ramas de actividad, 1975-1982.
- 8404 **Agustín Maravall:** Notas sobre la extracción de una señal en un modelo ARIMA.
- 8405 **Agustín Maravall:** Análisis de las series de comercio exterior –I–.
- 8406 **Ignacio Mauleón:** Aproximaciones a la distribución finita de criterios Ji-cuadrado: una nota introductoria.
- 8407 **Agustín Maravall:** Model-based treatment of a manic-depressive series.
- 8408 **Agustín Maravall:** On issues involved with the seasonal adjustment of time series.

- 8409 **Agustín Maravall:** Análisis de las series de comercio exterior –II–.
- 8410 **Antoni Espasa:** El ajuste estacional en series económicas.
- 8411 **Javier Ariztegui y José Pérez:** Recent developments in the implementation of monetary policy.
- 8412 **Salvador García-Atance:** La política monetaria en Inglaterra en la última década.
- 8413 **Ignacio Mauleón:** Consideraciones sobre la determinación simultánea de precios y salarios.
- 8414 **María Teresa Sastre y Antoni Espasa:** Interpolación y predicción en series económicas con anomalías y cambios estructurales: los depósitos en las cooperativas de crédito.
- 8415 **Antoni Espasa:** The estimation of trends with breaking points in their rate of growth: the case of the Spanish GDP.
- 8416 **Antoni Espasa, Ascensión Molina y Eloísa Ortega:** Forecasting the rate of inflation by means of the consumer price index.
- 8417 **Agustín Maravall:** An application of model-based signal extraction.
- 8418 **John T. Cuddington y José M. Viñals:** Budget deficits and the current account in the presence of classical unemployment.
- 8419 **John T. Cuddington y José M. Viñals:** Budget deficits and the current account: An intertemporal disequilibrium approach.
- 8420 **Ignacio Mauleón y José Pérez:** Interest rates determinants and consequences for macroeconomic performance in Spain.
- 8421 **Agustín Maravall:** A note on revisions in arima-based signal extraction.
- 8422 **Ignacio Mauleón:** Factores de corrección para contrastes en modelos dinámicos.
- 8423 **Agustín Maravall y Samuel Bentolila:** Una medida de volatilidad en series temporales con una aplicación al control monetario en España.
- 8501 **Agustín Maravall:** Predicción con modelos de series temporales.

* *Las publicaciones señaladas con un asterisco se encuentran agotadas.*

Información: Banco de España, Servicio de Publicaciones. Alcalá, 50. 28014 Madrid.

