8209

EQUIVALENCIA DE LOS TESTS DEL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE Y F DE EXCLUSION DE PARAMETROS EN EL CASO DE CONTRASTACION DE PERTURBACIONES HETEROCEDASTICAS (*)

Juan José Dolado

(*). Se agradece a los participantes en el Seminario de Métodos Cuantitativos aplicados a la Economía, sus contínuas sugerencias sobre la mejora de este trabajo. Mª. Carmen Rodriguez realizó la labor mecanográfica.

Introducción

El Principio del Multiplicador de Lagrange ha sido recientemente aplicado en la contrastación de la presencia de heterocedasticidad en las perturbaciones de un modelo lineal (ver Harvey (1976), Godfrey (1978)). En este artículo se estudia la conexión existente entre dichos tests y aquellos basados en regresiones de funciones de los residuos sobre las variables que definen la heterocedasticidad (ver Glejser (1969)). Se demuestra su equivalencia asintótica, por lo que en ausencia de resultados para muestras pequeñas, la facilidad de computación puede hacer preferibles los segundos. En la Sección I, se consideran los fundamentos teóricos básicos de la construcción del test del Multiplicador de Lagrange para los casos de heterocedasticidad multiplicativa y aditiva y su equivalencia asintótica con dos simples contrastes propuestos por Glejser y otros autores. La Sección II recoge otros posibles tests basados en la construcción de modelos con alternativas localmente equivalentes. Por último se comentan las conclusiones.

Sección I

Comenzaremos describiendo el modelo en el que van a ser aplicables los resultados obtenidos, estableciendo a continuación los fundamentos de los contrastes que se van a examinar en este artículo.

Considérese el modelo lineal con perturbaciones heterocedásticas

$$\begin{aligned} y_t &= \underset{\sim}{x}_t' \underset{\sim}{\beta} + u_t \qquad (t= 1 \dots T) \\ u_t &\sim N(0,\sigma_t^2) \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\underset{\sim}{x}_t$ es un vector k-dimensional de variables exógenas y $\underset{\sim}{\beta}$, el correspondiente vector k-dimensional de los parámetros. La varianza de las perturbaciones se repre-

sentará, en general, como una función de un conjunto de r variables $\underset{\sim}{\omega}_t$ y de r parámetros $\underset{\sim}{\alpha}$, donde las variables $\underset{\sim}{\omega}_t$ pueden coincidir o no con las variables explicativas del modelo, pero los parámetros $\underset{\sim}{\alpha}$ han de ser diferentes de los $\underset{\sim}{\beta}$ (*). Se verifican el resto de los supuestos del modelo lineal general incluyendo la ausencia de correlación entre las variables x_t y $\underset{\sim}{\omega}_t$ con las perturbaciones.

De entre las formas funcionales consideradas en la literatura destacan dos tipos de heterocedasticidad

a) heterocedasticidad multiplicativa, donde

$$\sigma_t^2 = \exp\ (\underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta}) \qquad (2)$$

tal que $\underset{\sim}{w}_t' = [1, \underbrace{\ln \omega'}_t]$

$$\underset{\sim}{\delta}' = [\log \sigma^2, \underset{\sim}{\alpha}']$$

de forma que esta especificación, recoge, sin pérdida de generalidad, varianzas del tipo

$$\sigma_t^2 = \sigma^2\ \omega_{1t}^{\alpha_1} \ \cdots\ \omega_{rt}^{\alpha_r}$$

b) heterocedasticidad aditiva, donde

$$\sigma_t^2 = (\underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta}) \qquad (3)$$

tal que $\underset{\sim}{w}'_t = [1, \underset{\sim}{\omega}_t']$

$$\underset{\sim}{\delta}' = [\sigma^2, \underset{\sim}{\alpha}']$$

de manera que mediante esta especificación se recogen varianzas del tipo

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \alpha_1\ \omega_{1t} + \ldots + \alpha_r\, \omega_{rt} \qquad (**)$$

En Harvey (op. cit.), se deriva un conjunto de contrastes de tales tipos de heterocedasticidad, ba-

---

(*) De no ser así la matriz de varianzas-covarianzas de los errores presentará términos no nulos fuera de la diagonal. Una discusión detallada de dicho efecto se encuentra en Harvey (1981 p. 98)

(**) De idéntica forma pueden recogerse otro tipo de especificaciones, quizá más familiares al lector, por ejemplo, $\underset{\sim}{w}_t' = [1, \underset{\sim}{\omega}_t'^2]$

sados en el principio del Multiplicador de Lagrange (ver Breusch-Pagan (1980)), (a partir de aquí se denominará LM), cuya utilidad reside en que dicha contrastación ha de llevarse a cabo en el marco de la hipótesis nula, ausencia de heterocedasticidad, por lo que se evalúa a partir de los resultados de la estimación por mínimos cuadrados ordinarios (MCO)

A continuación se describe brevemente el procedimiento general de construcción de test LM, para pasar posteriormente a obtener resultados concretos, en los casos anteriores. Una de las posibles formas de formular el test LM, es como sigue,

$$LM = \underset{\sim}{q}(\tilde{\underset{\sim}{\theta}})' \, I(\tilde{\underset{\sim}{\theta}})^{-1} \, \underset{\sim}{q}(\tilde{\theta}) \overset{\cdot}{\sim} \chi^2_n \ (*) \quad (4)$$

donde q es el "score"(**) de la función de verosimilitud, i. e. $q = \frac{\delta L}{\delta \underset{\sim}{\theta}}$, siendo L el logaritmo de dicha función; I es la matriz de información de Fisher; $\tilde{\underset{\sim}{\theta}}$ son los estimadores maximoverosímiles obtenidos bajo la hipótesis nula y n es el número de restricciones.

En el caso de que las restricciones se apliquen sólo a un subconjunto de $\underset{\sim}{\theta}$, como ocurre en nuestro caso (en el que $\theta' = (\underset{\sim}{\beta}', \underset{\sim}{\delta}')$) donde sólo nos interesa la hipótesis nula H_o: $\underset{\sim}{\delta}' = [\log \sigma^2, \ \underset{\sim}{0}']$, entonces (4) puede reformularse como,

$$\underset{\sim}{q}_2(\tilde{\theta})' \left[I_{22} - I_{21} \, I_{11}^{-1} \, I_{12} \right]^{-1}_{\tilde{\theta}} \, \underset{\sim}{q}_2(\tilde{\underset{\sim}{\theta}})$$

donde $\underset{\sim}{q}_2$ recoge las derivadas de L $(\underset{\sim}{\theta})$ respecto de los parámetros restringidos, y la matriz entre corchetes corresponde al elemento (2,2) de la matriz I, particionada conformablemente. Si, como también ocurre en nuestro caso, las submatrices I_{12} e I_{21} son nulas, el test se convierte en,

$$q_\delta(\tilde{\underset{\sim}{\beta}}, \tilde{\underset{\sim}{\delta}})' \, I^{-1}_{\delta\delta'}(\tilde{\underset{\sim}{\beta}}, \tilde{\underset{\sim}{\delta}}) \, q_\delta(\tilde{\underset{\sim}{\beta}}, \tilde{\underset{\sim}{\delta}}) \overset{\cdot}{\sim} \chi^2_r \quad (5)$$

(*) La notación "$\overset{\cdot}{\sim}$" indica "distribución asintótica", mientras que "$\sim$" indica "distribución exacta"

(**) No existiendo en la literatura econométrica española un término cuya traducción se ajuste a dicha expresión, se ha preferido utilizar el término anglosajón, entendiendo por el mismo, el vector de derivadas parciales, gradiente, de la función de verosimilitud con respecto a sus parámetros.

Sobre la base de (5) estudiemos ambos tipos de heterocedasticidad:

a) La función de verosimilitud será de la forma,

$$L = c - \frac{1}{2} \sum_t \underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta} - \frac{1}{2} \sum_t \exp(-\underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta}) (y_t - \underset{\sim}{x}_t' \underset{\sim}{\beta})^2$$

obteniéndose fácilmente las expresiones siguientes,

$$\frac{\delta L}{\delta \beta} = \sum_t \exp(-\underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta}) \underset{\sim}{x}_t u_t$$

$$\frac{\delta L}{\delta \delta} = -\frac{1}{2} \sum_t \underset{\sim}{w}_t + \frac{1}{2} \sum_t \underset{\sim}{w}_t \exp(-\underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta}) u_t^2$$

$$I^{-1} = \begin{pmatrix} (\sum_t \sigma_t^{-2} \underset{\sim}{x}_t \underset{\sim}{x}'_t)^{-1} & 0 \\ 0 & 2(\sum_t \underset{\sim}{w}_t \underset{\sim}{w}_t')^{-1} \end{pmatrix}$$

con lo que evaluando dichas expresiones bajo la hipótesis nula y sustituyendo en (5) se obtiene,

$$LM = \frac{(\sum_t \underset{\sim}{w}_t v_t)' (\sum_t \underset{\sim}{w}_t \underset{\sim}{w}_t')^{-1} (\sum_t \underset{\sim}{w}_t v_t)}{2} \qquad (6)$$

donde $v_t = \frac{\hat{u}_t^2}{\hat{\sigma}^2} - 1$, siendo $\hat{u}_t$ los errores minimocuadráticos de estimar (1) bajo la hipótesis nula de ausencia de heterocedasticidad y $\hat{\sigma}^2$ el estimador máximo verosimil de σ^2

Como $\text{plim} \frac{\sum_t v_t^2}{T} = 2$, una expresión asintóticamente equivalente a (6) será

$$LM^* = T \left[\frac{(\sum_t \underset{\sim}{w}_t v_t)' (\sum_t \underset{\sim}{w}_t \underset{\sim}{w}_t')^{-1} (\sum_t \underset{\sim}{w}_t v_t)}{\sum v_t^2} \right] \sim \chi_r^2 \qquad (7)$$

donde la expresión entre corchetes puede interpretarse como el R^2 de una regresión sin término constante de v_t sobre $\underset{\sim}{w}_t$, dado que $\sum_t v_t = 0$. Debido a esta última circunstancia, es fácilmente comprobable que los $\underset{\sim}{w}_t$ en (7) pueden tomarse en desviaciones con respecto a la media.

b) En este caso, la función de verosimilitud tomará la forma

$$L = c - \frac{1}{2} \sum_t \ln(\underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta}) - \frac{1}{2} \sum_t (\underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta})^{-1} (y_t - \underset{\sim}{x}_t' \underset{\sim}{\beta})^2$$

tal que

$$\frac{\delta L}{\delta \beta} = \sum_t (\underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta})^{-1} \underset{\sim}{x}_t u_t$$

$$\frac{\delta L}{\delta \delta} = -\frac{1}{2}\sum_t (\underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta})^{-1} \underset{\sim}{w}_t + \frac{1}{2}\sum_t (\underset{\sim}{w}_t' \underset{\sim}{\delta})^{-2} \underset{\sim}{w}_t u_t^2$$

$$I^{-1} = \begin{pmatrix} (\sum_t \sigma_t^{-2} \underset{\sim}{x}_t \underset{\sim}{x}_t')^{-1} & o \\ o & 2(\sum_t \sigma_t^{-4} \underset{\sim}{w}_t \underset{\sim}{w}_t')^{-1} \end{pmatrix}$$

dichas expresiones evaluadas bajo la hipótesis nula y sustituídas en (5), nos dan una expresión idéntica a (6) que puede reformularse como (7) (*). Así pues, la forma del test LM no depende de la forma funcional exigida para representar la heterocedasticidad.

Seguidamente, se propone un procedimiento sencillo, basado en un test F de exclusión de parámetros obtenido a partir de los residuos minimocuadráticos $\hat{u}_t$.

En el caso a) se computan los cuadrados de los residuos (**) ,y se efectúa la siguiente regresión

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_o + \underbrace{\ln\ \omega}_t' \underset{\sim}{\alpha} + \varepsilon_t \qquad (8)$$

Un test de $\underset{\sim}{\alpha}=0$ es un test de la hipótesis nula de homocedasticidad basado en que $\varepsilon_t \sim$ NID $(0,\sigma_\varepsilon^2)$ frente a la hipótesis alternativa de heterocedasticidad. Una alternativa específica a considerar podría ser por ejemplo $\alpha = 1$, en el caso de que $r=1$, con lo que estaría contrastando el hecho de que la variable ω fuese el deflactor adecuado en el modelo (1). Este tipo de heterocedasticidad es muy frecuente en la modelización económica, donde, por ejemplo. cualquier modelo que se especifique en términos nominales ha de estar sujeto a la

---

(*) Con la diferencia obvia de que en el primer caso los regresores $\underset{\sim}{\omega}_t$ estarán en logaritmos, mientras que en el segundo caso lo están en niveles.

(**) Podría parecer que un procedimiento más natural resultaría ser tomar como regresando el logaritmo natural de los cuadrados de los residuos. Sin embargo en dicho caso, la transfor-

sospecha de que su error sea heterocedástico, si es que la modelización apropiada es en términos reales y viceversa. Por tanto, la naturaleza de la heterocedasticidad implícita se halla fuertemente relacionada con el tipo de deflactor a utilizar. Así pues, un test de $H_o: \underset{\sim}{\alpha} = 0$, sería de la forma

$$\frac{\hat{\underset{\sim}{\alpha}}' (\Sigma \underset{\sim}{\ln \omega^*_t} \underset{\sim}{\ln \omega^{*\prime}_t}) \underset{\sim}{\alpha}}{\hat{\sigma}^2_\varepsilon} \cdot \frac{1}{r} \sim F_{r,T-r} \quad (9)$$

siendo $\underset{\sim}{\ln \omega^*_t}$ el vector de desviaciones con respecto a la media y $\hat{\sigma}^2_\varepsilon$ y $\hat{\underset{\sim}{\alpha}}$ los estimados minimocuadráticos de la varianza de ε_t y de $\underset{\sim}{\alpha}$ en (8).

Bajo la hipótesis nula (9) es equivalente a

$$\frac{\Sigma \underset{\sim}{\ln \omega^*_t}\, \varepsilon_t \; (\Sigma \underset{\sim}{\ln \omega^*_t} \underset{\sim}{\ln \omega^{*\prime}_t})^{-1} \; (\underset{\sim}{\ln \omega^*_t}\, \varepsilon_t)}{\hat{\sigma}^2_\varepsilon} \cdot \frac{1}{r} \quad (10)$$

además $\hat{\alpha}_o = \ln \hat{\sigma}^2$

con lo que

$$\hat{\varepsilon}_t = \frac{\sum_t \hat{u}^2_t}{T} = \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{u^2_t}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right) = \hat{\sigma}^2 \, v_t$$

Si se sustituye en (10), teniendo en cuenta que $\hat{\varepsilon}_t$ converge en probalidad a ε_t, se obtiene

$$\frac{(\sum_t \underset{\sim}{\ln \omega^*_t} v_t)' \; (\sum_t \underset{\sim}{\ln \omega^*_t} \underset{\sim}{\ln \omega^{*\prime}_t})^{-1} \; (\sum_t \underset{\sim}{\ln \omega^*_t}\, v_t)}{\frac{\sum_t v^2_t}{T-r}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{LM^*}{r} \cdot \frac{T-r}{T} \quad (11)$$

por tanto

$$LM^* = \frac{T}{T-r} \cdot r \cdot F_{r,\, T-r}$$

expresión que converge en distribución a una χ^2_r, ya que $\lim_{T \to \infty} r\, F_{r,T-r}$ converge en distribución a una χ^2_r (ver Cramer(1946, p.254)). Así pues, podemos afir-

(**) (cont.) mación de un test LM en un test F, impondría el uso de aproximaciones del tipo $\ln \left(\frac{\hat{u}^2_t}{\hat{\sigma}^2} \right) \simeq \frac{\hat{u}^2_t}{\hat{\sigma}^2} - 1$ cuya validez residuo a residuo, resulta más que cuestionable.

mar que r veces el valor de la F de exclusión de α en (8) es un test asintóticamente equivalente a LM*, cuya potencia es similar, si la hipótesis nula es cierta, y cuya computación es muy simple.

En el caso b), dada la invariancia de LM* frente a las alternativas en la forma funcional de la heterocedasticidad, parece lógico computar un test F de exclusión de $\underset{\sim}{\alpha}$, a partir de la regresión

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_o + \underset{\sim}{\omega}_t' \underset{\sim}{\alpha} + \varepsilon_t \qquad (12)$$

tal que $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Dicho contraste puede expresarse en la forma siguiente

$$\frac{\hat{\underset{\sim}{\alpha}}' (\Sigma_t \underset{\sim}{\omega}_t^{*\prime} \underset{\sim}{\omega}_t^{*\prime}) \hat{\underset{\sim}{\alpha}}}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{r} \sim F_{r,\ T-r} \qquad (13)$$

Bajo la hipótesis nula, puede reexpresarse en forma similar a (10), y teniendo en cuenta que

$$\hat{\alpha}_o = \hat{\sigma}^2$$

y

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{u}_t^2 - \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2 \left(\frac{\hat{u}_t^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right) = \hat{\sigma}^2 v_t$$

se obtiene una expresión equivalente a (11),

$$\frac{(\Sigma_t \underset{\sim}{\omega}_t^* v_t)' (\Sigma_t \underset{\sim}{\omega}_t^* \underset{\sim}{\omega}_t^{*\prime})^{-1} (\Sigma_t \underset{\sim}{\omega}_t^* v_t)}{\frac{\Sigma_t v_t^2}{T-r}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{LM^*}{r} \cdot \frac{T-r}{r} = F_{r,T-r} \qquad (14)$$

por tanto, de nuevo r veces el valor del test F de exclusión de $\underset{\sim}{\alpha}$ en (12) es un test asintóticamente, equivalente al test LM .

Así pues, la contrastación de heterocedasticidad multiplicativa o aditiva sobre la base de los procedi

mientos descritos, puede resumirse en las siguientes etapas:

(I) Estimar las regresiones (8) y (12) formulando los tests (11) y (14)

(II) Si ninguna de las dos alternativas se rechaza al nivel de significación preestablecida, entonces el procedimiento queda en suspenso a la espera de especificar una alternativa más compleja. Otra posibilidad es contrastar una contra otra incluyendo regresiones en niveles y logaritmos en una ecuación del tipo (8).

(III) Si solo se rechaza la versión aditiva, se adopta la multiplicativa y viceversa.

(IV) Si ambas son rechazadas y en base al análisis tradicional de gráficas de residuos y variables, no se espera otro tipo de heterocedasticidad, puede procederse a estimar el modelo por MCO.

(V) Si se verifica (III) entonces los estimadores obtenidos bajo (8) o (12) pueden utilizarse para establecer un procedimiento iterativo, que bajo los supuestos del modelo, resultará asintóticamente eficiente.

Sección II

Una vía general de obtener regresiones similares a (8) o (12) en las que computar tests de los parámetros que definen las heterocedasticidad de los residuos, se basa en la utilización de modelos con alternativas localmente equivalentes (ALE). Dichos modelos han sido formulados recientemente (ver Godfrey (1981)) y se basan en la idea de que al computarse el test LM bajo la hipótesis nula, pueden existir modelos que bajo la alternativa difieran pero cuyo "score" y matriz de información coincidan bajo la hipótesis nula. De esta forma resultará posible obtener tests que serán idénticos frente una u otra alternativa.

Si se tiene un modelo no restringido cuya logaritmo de función de verosimilitud es L (θ), se trata de buscar otro modelo tal que siendo $L^*(\theta)$ su logaritmo de la función de verosimilitud, verifique que

i) $\tilde{\theta}$ maximiza $L^*(\theta)$ y L (θ) bajo la hipótesis nula.

ii) $q(\tilde{\theta}) = q^*(\tilde{\theta})$

Si L (θ) puede expresarse como

$$L(\theta) = c - \frac{T}{2} \ln |\Omega(\theta_1)| - \frac{1}{2} \varepsilon(\theta)' [\Omega(\theta_1)]^{-1} \varepsilon(\theta)$$

donde c es una constante, $\theta' = (\theta_1', \theta_2')$ y $H_o: \theta_2 = 0$, existen 2 maneras de computar $L^*(\theta)$. En el primer caso se considera una expansión lineal de Taylor de $\varepsilon_t(\theta)$ alrededor de $\theta_2 = 0$, es decir

$$\varepsilon_t(\theta) = \varepsilon_t(\theta_1, 0) + \frac{\delta \varepsilon_t(\theta_1, 0)}{\delta \theta_2} \theta_2 + R(\theta) = \varepsilon_t^*(\theta) + R(\theta) \quad (15)$$

siendo $\varepsilon_t^*(\theta)$ la suma de los dos primeros términos del lado derecho de (15) y donde el resto R (θ) contiene términos de segundo grado y sucesivos en θ_2, por lo que R $(\theta_1, 0) = 0$. Por tanto, bajo H_o, $\varepsilon_t(\theta_1, 0)$ y $\varepsilon_t^*(\theta_1, 0)$ coinciden, aunque difieran cuando $\theta_2 \neq 0$. Además

$$\frac{\delta \varepsilon_t(\theta_1, 0)}{\delta \theta_2} = \frac{\delta \varepsilon_t^*(\theta_1, 0)}{\delta \theta_2}$$

por lo que $L^*(\theta)$ puede construirse como

$$L^*(\theta) = c - \frac{T}{2} \ln \Omega(\theta_1) - \frac{1}{2} \varepsilon^*(\theta)' \Omega(\theta_1)^{-1} \varepsilon^*(\theta) \quad (16)$$

Resulta inmediatamente observable que si se impone $\theta_2 = 0$ las condiciones i) y ii) se verifican. En el 2° caso se efectúa una ligera transformación de ε_t^* sustituyendo θ_1 por $\tilde{\theta}_1$ en el término de la derivada, esto es,

$$\varepsilon_t^+(\theta) = \varepsilon_t(\theta_1, 0) + \frac{\delta \varepsilon_t(\tilde{\theta}_1, 0)}{\delta \theta_2} \theta_2 \quad (17)$$

por lo que $\tilde{\theta}_1$ maximizará $L^+(\underset{\sim}{\theta})$, obtenida a partir de $\varepsilon_t^+(\underset{\sim}{\theta})$ y ii) se verificará.

Obsérvese, que para aplicar dichos resultados a nuestro caso, es necesario efectuar una reformulación del modelo (1), puesto que en los modelos ALE analizados, no se efectuan contrastaciones sobre los elementos que definen la matriz de varianzas-covarianzas de los errores. Por ello, (1) puede expresarse en la forma,

$$(y_t - \underset{\sim}{x}_t'\underset{\sim}{\beta}) \exp\left(\frac{-1}{2}\,\underset{\sim}{\ln}\,\omega_t'\underset{\sim}{\alpha}\right) = \varepsilon_t \qquad (18)$$

ó

$$(y_t - \underset{\sim}{x}_t'\underset{\sim}{\beta})\,(\underset{\sim}{\omega}_t'\underset{\sim}{\alpha})^{-1/2} = \varepsilon_t$$

donde $\varepsilon_t \sim NID(0,\sigma_\varepsilon^2)$
y bajo $H_o:\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{0}$, $\varepsilon_t = u_t$

Para el análisis de ambos casos, utilizaremos el modelo ALE $L^+(\theta)$, ya que del mismo se derivan tests F similares a los anteriores. Así pues, en el caso a)

$$\frac{\delta\varepsilon_t(\hat{\underset{\sim}{\beta}},\underset{\sim}{0})}{\delta\underset{\sim}{\alpha}} = -\frac{1}{2}\,\hat{u}_t\,\underset{\sim}{\ln}\,\omega_t$$

con lo que sustituyendo en (18), se obtiene

$$\varepsilon_t^+(\underset{\sim}{\beta},\underset{\sim}{0}) = y_t - \underset{\sim}{x}_t'\underset{\sim}{\beta} - \frac{1}{2}\,\hat{u}_t\,\underset{\sim}{\ln}\,\omega_t'\underset{\sim}{\alpha} = \varepsilon_t \quad (19)$$

Por tanto, el modelo de regresión en que utilizan el test F, será

$$y_t = \underset{\sim}{x}_t'\underset{\sim}{\beta} + \frac{1}{2}\,\hat{u}_t\,\underset{\sim}{\ln}\,\omega_t'\underset{\sim}{\alpha} + \varepsilon_t \quad (20)$$

Antes de computar el test F para contrastar $H_o:\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{0}$, conviene examinar las características de dicho modelo. En primer lugar, los resultados clásicos de inferencia para el modelo lineal general "y= Xβ +u" exigen que

"$T^{-1/2}X'u \sim N(0, \sigma^2 \text{ plim } \frac{X'X}{T})$". En el caso de (20), para el segundo conjunto de regresores, tendremos que,

$$T^{-1/2}\sum_t u_t\, \hat{u}_t \ln \underset{\sim}{\omega}_t, \text{ bajo } H_o, \text{ se distribuye como}$$

$$T^{-1/2} \sum u_t^2 \ln \underset{\sim}{\omega}_t \sim N(\sigma^2, 2\sigma^4 \text{ plim } \frac{\sum_t \ln \underset{\sim}{\omega}_t \ln \underset{\sim}{\omega}_t'}{T}) =$$

$$= N(\sigma^2, 2\sigma^2 \text{ plim } \frac{\sum_t u_t^2 \ln \underset{\sim}{\omega}_t \ln \underset{\sim}{\omega}_t'}{T})$$

ya que $V(u_t^2) = 2\sigma^4$. Con el fin de asimilar dicha expresión a la necesaria, resulta conveniente estimar (20) en desviaciones con respecto a la media, ya que en ese caso

$$\sum_t u_t^2 \ln \underset{\sim}{\omega}^*_t = \sum_t (u_t^2 - \sigma^2) \ln \underset{\sim}{\omega}^*_t$$

puesto que $\sum_t \ln \underset{\sim}{\omega}^*_t = 0$. Por otra parte, al computar el test F, habrá que dividir por un factor 2 proveniente de la expresión de la varianza asintótica.

En segundo lugar, la reformulación del modelo (1) en la expresión (18), impone la existencia de un Jacobiano en la función de verosimilitud $L^+(\underset{\sim}{\theta})$. Despreciando términos de orden de magnitud inferior y de nuevo tomando desviaciones con respecto a la media se obtiene

$$\frac{\delta \varepsilon_t(\underset{\sim}{\beta}, \underset{\sim}{0})}{\delta y_t} = 1 - \frac{1}{2} \ln \underset{\sim}{\omega}_t' \underset{\sim}{\alpha}$$

con lo que

$$\sum_t \ln \| 1 - \frac{1}{2} \ln \underset{\sim}{\omega}_t' \underset{\sim}{\alpha} \| \simeq -\frac{1}{2} \sum_i \alpha_i \sum_t \ln \omega_{ti} = 0$$

El test F de exclusión de los parámetros $\underset{\sim}{\alpha}$ en (20) se computa de la forma

$$\frac{\frac{1}{4}\, \hat{\underset{\sim}{\alpha}}' \left(\sum_t \hat{u}_t^2 \ln \underset{\sim}{\omega}^*_t \ln \underset{\sim}{\omega}^{*\prime}_t\right) - \left(\sum_t \hat{u}_t \ln \underset{\sim}{\omega}^*_t \underset{\sim}{x}^{*\prime}_t\right)\left(\sum_t \underset{\sim}{x}^*_t \underset{\sim}{x}^{*\prime}_t\right)^{-1}\left(\sum_t \hat{u}_t \underset{\sim}{x}^*_t \ln \underset{\sim}{\omega}^{*\prime}_t\right)\hat{\alpha}}{2\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \cdot r} \sim F_{r,T-r} \quad (21)$$

Bajo la hipótesis nula,

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \underset{\sim}{x}_t' \underset{\sim}{\beta} = \hat{u}_t$$

por tanto (21) puede reformularse asintóticamente como:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\sum \hat{u}_t^2 \, \underset{\sim}{\ln \omega_t^*}\right)' \left(\frac{1}{4} \sum_t \hat{u}_t^2 \, \underset{\sim}{\ln \omega_t^*} \, \underset{\sim}{\ln \omega_t^*}'\right)^{-1} \left(\frac{1}{2} \sum_t \hat{u}_t^2 \, \underset{\sim}{\ln \omega_t^*}\right)}{\frac{\sum_t \hat{u}_t^2}{T-(k+r)} \cdot 2r} \qquad (22)$$

donde se han eliminado términos de la forma $\left(\sum_t \hat{u}_t \, \underset{\sim}{\ln \omega_t^*} \underset{\sim}{x}_t^{*}{}'\right)$, ya que suponiendo que los regresores de (20) son no estocásticos y están uniformemente acotados, se verificará que

$$\operatorname{plim} \; T^{-1} \sum_{t=1}^{T} x_{tj} \left(\hat{u}_t \ln \omega_{ti}^*\right) = 0$$

Además $\sum_t \hat{u}_t^2 \, \underset{\sim}{\ln} \, \omega_t^* = \sum_t (\hat{u}_t^2 - \hat{\sigma}^2) \underset{\sim}{\ln \omega_t^*} = \sum_t \hat{\sigma}^2 \, v_t \, \underset{\sim}{\ln \omega_t^*}$, por lo que (22) puede reescribirse de nuevo como

$$\frac{\hat{\sigma}^2 \left(\sum_t v_t \underset{\sim}{\ln \omega_t^*}\right)' \left[\hat{\sigma}^2 \sum_t \underset{\sim}{\ln \omega_t^*} \, \underset{\sim}{\ln \omega_t^*}'\right]^{-1} \hat{\sigma}^2 \left(\sum_t v_t \underset{\sim}{\ln \omega_t^*}\right)}{\hat{\sigma}^2 \cdot \frac{T}{T-k} \cdot 2r} =$$

$$= \frac{LM}{r} \cdot \frac{T-k}{T} = F_{r,T-(r+k)} \qquad (23)$$

por tanto, de nuevo r veces el valor del test F de exclusión de los parámetros α en (20) se distribuye asintóticamente como el test LM.

Para el caso de heterocedasticidad aditiva, los resultados son perfectamente similares a los del caso multiplicativo, obteniéndose un test asintóticamente equivalente al test LM, a partir del test F de exclusión de los parámetros en el modelo de regresión.

$$y_t = \underset{\sim}{x}_t' \underset{\sim}{\beta} + \frac{1}{2} \hat{u}_t \, \underset{\sim}{\omega}_t' \underset{\sim}{\alpha} + \varepsilon_t \; ; \; \varepsilon_t \sim NID(0, \sigma_\varepsilon^2) \qquad (24)$$

estimado en desviaciones con respecto a la media.

Una vez que se ha examinado formalmente la conveniencia de aplicar tests F de exclusión de parámetros a regresiones del tipo (20) ó (24), resultaría conveniente establecer cual es la conexión de dichas ecuaciones con las del tipo (18), correspondientes a efectuar mínimos cuadrados generalizados (MCG). Con el fin de ilustrar dicha conexión se ha escogido el caso multiplicativo, ya que para el caso aditivo, el procedimiento es perfectamente similar. En el caso de que el modelo lineal general (1) presente una estructura en su matriz de varianzas-covarianzas del tipo (2), el lector conoce la utilidad de aplicar MCG para corregir dicha divergencia de la perturbación homocedástica, para lo cual estima por MCO una ecuación del tipo (18), habiendo conseguido previamente un estimador consistente de los parámetros $\underset{\sim}{\alpha}$. Si en (20) se resta a ambos lados de la ecuación $\underset{\sim}{x}_t' \underset{\sim}{\beta}$, se obtiene,

$$\hat{u}_t = \underset{\sim}{x}_t' \, (\underset{\sim}{\beta} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}) + \frac{1}{2} \hat{u}_t \, \underset{\sim}{\ln \omega}_t' \underset{\sim}{\alpha} + \varepsilon_t \, .$$

que puede reescribirse como

$$\hat{u}_t \left[1 - \frac{1}{2} \, \underset{\sim}{\ln \omega}_t' \underset{\sim}{\alpha} \right] = \underset{\sim}{x}_t' \, (\underset{\sim}{\beta} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}) + \varepsilon_t$$

Siguiendo el mismo procedimiento en la ecuación (18) multiplicativa, se obtiene,

$$\hat{u}_t \exp(-\frac{1}{2} \underset{\sim}{\ln \omega}_t' \underset{\sim}{\alpha}) = \underset{\sim}{x}_t' \, (\underset{\sim}{\beta} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}) \exp(-\frac{1}{2} \underset{\sim}{\ln \omega}_t' \underset{\sim}{\alpha}) + \varepsilon_t \qquad (25)$$

donde para aplicar MCG, se sustitye $\underset{\sim}{\alpha}$ por un estimador $\hat{\underset{\sim}{\alpha}}$, tal que $\text{p lim} \; \hat{\underset{\sim}{\alpha}} = \underset{\sim}{\alpha}$. A continuación se efectua un desarrollo de Taylor del término exponencial alrededor del valor del parámetro α bajo la hipótesis nula , i.e., $\alpha = o$, obteniéndose,

$$\exp(-\frac{1}{2} \underset{\sim}{\ln \omega}_t' \hat{\underset{\sim}{\alpha}}) = 1 - \frac{1}{2} \underset{\sim}{\ln \omega}_t' \hat{\underset{\sim}{\alpha}} + O_p(\frac{1}{T}) \qquad (26)$$

Obsérvese que el resto del desarrollo tiene un orden de magnitud probabilístico $O_p(T^{-1})$ ya que $\hat{\underset{\sim}{\alpha}}$, al ser un estimador consistente, tiene $O_p(T^{-1/2})$. Sustituyendo (26) en (25) se obtiene,

$$\hat{u}_t \left[1 - \frac{1}{2} \ln \underset{\sim}{\omega}'_t \hat{\underset{\sim}{\alpha}} + O_p\left(\frac{1}{T}\right) \right] = \underset{\sim}{x}'_t (\underset{\sim}{\beta} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}) \left[1 - \frac{1}{2} \ln \underset{\sim}{\omega}'_t \hat{\underset{\sim}{\alpha}} + O_p\left(\frac{1}{T}\right) \right] + \varepsilon_t \qquad (27)$$

donde el segundo sumando en el lado derecho de dicha expresión es de orden probalístico $O_p(T^{-1})$, ya que $(\hat{\beta} - \beta)$ es de $O_p(T^{-1/2})$, por lo que junto con el resto de términos de al menos $O_p(T^{-1})$ tenderá a cero de forma más rápida que los términos que aparecen en la siguiente ecuación:

$$\hat{u}_t \left[1 - \frac{1}{2} \ln \underset{\sim}{\omega}'_t \hat{\underset{\sim}{\alpha}} \right] = \underset{\sim}{x}'_t (\underset{\sim}{\beta} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}) + \varepsilon_t \qquad (28)$$

Esta expresión es idéntica a la expresión (19) excepto que $\hat{\underset{\sim}{\alpha}}$ aparece en vez de $\underset{\sim}{\alpha}$, pero como en (19) se obtiene un estimador consistente de $\underset{\sim}{\alpha}$, su equivalencia asintótica con (24) estará asegurada.

Los comentarios finales de la sección anterior también son aplicables en este caso.

Conclusiones

En este trabajo se estudia la conexión existente entre tests de heterocedasticidad multiplicativa o aditiva basados en el Principio del Multiplicador de Lagrange, aquellos otros basados en regresiones de funciones simples de los residuos sobre las variables que definen la heterocedasticidad y los obtenidos a partir de modelos con alternativas localmente equivalentes. Se proponen contrastes basados en tests de exclusión de parámetros a partir de estimaciones minimocuadráticas, disponibles en cualquier programa habitual de estimación. Su aplicación es importante en modelos en que se desconozca si las variables deben entrar en términos reales o nomina-

les. Además existen, determinadas series, como podría ser el caso de índices de cotizaciones de valores bursátiles, cuya dispersión puede depender del volumen de contratación, por lo que dicha heterocedasticidad y su forma podría ser contrastada sobre la base de dichos tests.

Referencias

Breusch, T. y Pagan, A. (1980)"The Lagrange multiplier test and its application to model specification in econometrics" Review of Economic Studies, 47.

Cramer, H. (1946), "Mathematical Methods of Statistics" Princenton U.P.

Glejser, H (1969),"A new test for Heteroskedasticity". Journal of the American Statistical Association,63.

Godfrey, L. (1978), "Testing for multiplicative Heteroskedasticity", Journal of Econometrics, 8.

Godfrey, L. (1981),"On the invariance of the Lagrange multiplior test with respect to certain changes in the alternative hypothesis" Económetrica, 49.

Harvey, A. (1976),"Estimating regression models with multiplicative heteroskedasticity", Económetrica, 44.

Harvey, A. (1981), "The Econometric Analysis of Time Series" Phillip Allan. Oxford.

DOCUMENTOS DE TRABAJO:

7801 **Vicente Poveda y Ricardo Sanz**: Análisis de regresión: algunas consideraciones útiles para el trabajo empírico.

7802 **Julio Rodríguez López**: El PIB trimestral de España, 1958-1975. Avance de cifras y comentarios **(Agotado).**

7803 **Antoni Espasa**: El paro registrado no agrícola 1964-1976: un ejercicio de análisis estadístico univariante de series económicas. (Publicado en Estudios Económicos n.° 15).

7804 **Pedro Martínez Méndez y Raimundo Poveda Anadón**: Propuestas para una reforma del sistema financiero.

7805 **Gonzalo Gil**: Política monetaria y sistema financiero. Respuestas al cuestionario de la CEE sobre el sistema financiero español. Reeditado con el número 8001.

7806 **Ricardo Sanz**: Modelización del índice de producción industrial y su relación con el consumo de energía eléctrica.

7807 **Luis Angel Rojo y Gonzalo Gil**: España y la CEE. Aspectos monetarios y financieros.

7901 **Antoni Espasa**: Modelos ARIMA univariantes, con análisis de intervención para las series de agregados monetarios (saldos medios mensuales) M_3 y M_2.

7902 **Ricardo Sanz**: Comportamiento del público ante el efectivo.

7903 **Nicolás Sánchez-Albornoz**: Los precios del vino en España, 1861-1890. Volumen I: Crítica de la fuente.

7904 **Nicolás Sánchez-Albornoz**: Los precios del vino en España, 1861-1890. Volumen II: Series provinciales.

7905 **Antoni Espasa**: Un modelo diario para la serie de depósitos en la Banca: primeros resultados y estimación de los efectos de las huelgas de febrero de 1979.

7906 **Agustín Maravall**: Sobre la identificación de series temporales multivariantes.

7907 **Pedro Martínez Méndez**: Los tipos de interés del Mercado Interbancario.

7908 **Traducción de E. Giménez-Arnau**: Board of Governors of The Federal Reserve System-Regulations AA–D–K–L–N–O–Q **(Agotado).**

7909 **Agustín Maravall**: Effects of alternative seasonal adjustment procedures on monetary policy.

8001 **Gonzalo Gil**: Política monetaria y sistema financiero. Respuestas al cuestionario de la CEE sobre el sistema financiero español **(Agotado).**

8002 **Traducción de E. Giménez-Arnau**: Empresas propietarias del Banco. Bank Holding Company Act-Regulation «Y» **(Agotado).**

8003 **David A. Pierce, Darrel W. Parke, and William P. Cleveland, Federal Reserve Board and Agustín Maravall, Bank of Spain**: Uncertainty in the monetary aggregates: Sources, Measurement and policy effects.

8004 **Gonzalo Gil**: Sistema financiero español.

8005 **Pedro Martínez Méndez**: Monetary Control by control of the monetary base: The Spanish Experience (la versión al español se ha publicado como Estudio Económico n.° 20).

8101 **Agustín Maravall, Bank of Spain and David A. Pierce, Federal Reserve Board**: Errors in preliminary money stock data and monetary aggregate targeting.

8102 **Antoni Espasa**: La estimación de los componentes tendencial y cíclico de los indicadores económicos.

8103 **Agustín Maravall**: Factores estacionales de los componentes de $m.^3$. Proyecciones para 1981 y revisiones, 1977-1980.

8104 Normas relativas a las operaciones bancarias internacionales en España.

8105 **Antoni Espasa**: Comentarios a la modelización univariante de un conjunto de series de la economía española.

8201 **Antoni Espasa**: El comportamiento de series económicas: Movimientos atípicos y relaciones a corto y largo plazo.

8202 **Pedro Martínez Méndez e Ignacio Garrido**: Rendimientos y costes financieros en el Mercado Bursátil de Letras.

8203 **José Manuel Olarra y Pedro Martínez Méndez**: La Deuda Pública y la Ley General Presupuestaria.

8204 **Agustín Maravall**: On the political economy of seasonal adjustment and the use of univariate time-series methods.
8205 **Agustín Maravall**: An application of nonlinear time series forecasting.
8206 **Ricardo Sanz**: Evaluación del impacto inflacionista de las alzas salariales sobre la economía española en base a las tablas input-output.
8207 **Ricardo Sanz y Julio Segura**: Requerimientos energéticos y efectos del alza del precio del petróleo en la economía española.
8208 **Ricardo Sanz**: Elasticidades de los precios españoles ante alzas de diferentes inputs.
8209 **Juan José Dolado**: Equivalencia de los tests del multiplicador de Lagrange y F de exclusión de parámetros en el caso de contrastación de perturbaciones heterocedásticas.

***Estas publicaciones —que, por su carácter especializado, son de tirada reducida— se distribuyen gratuitamente a las personas o entidades interesadas que las soliciten por correo.*

Información: Banco de España, Servicio de Publicaciones. Alcalá, 50. Madrid-14.