1 000003 207818
D 9094

7906

SOBRE LA IDENTIFICACION DE SERIES TEMPORALES MULTIVARIANTES

Agustín Maravall

BANCO DE ESPAÑA
SERVICIO DE ESTUDIOS
Documentación y Biblioteca

SOBRE LA IDENTIFICACION DE SERIES TEMPORALES MULTIVARIANTES

Agustín Maravall
Servicio de Estudios
BANCO DE ESPAÑA

Agradezco a A. Espasa, R. Sanz y D.A. Pierce los comentarios a una versión previa del trabajo.

INTRODUCCION

Los modelos ARIMA univariantes se han generalizado a modelos multivariantes. La identificación (especificación) de estos modelos multivariantes es una labor compleja. En general, buena parte de la literatura sobre el tema y algunos de los programas más comercializados utilizan el procedimiento de dos etapas desarrollado por Haugh: primero se obtienen las innovaciones de las series univariantes, y en una segunda etapa estas innovaciones se modelizan conjuntamente.

El propósito de este trabajo es señalar que dicho procedimiento no ofrece una solución satisfactoria. Si se aplica correctamente, la complejidad del método lo convierte en prácticamente prohibitivo, y salvo en casos de relación causal unidireccional, el modelo para las innovaciones es aún más difícil de identificar que el modelo original. Por otra parte, soluciones más sencillas, como las que aparecen en algún software de amplia difusión, contienen contradicciones internas y conducen, como consecuencia, a modelos erróneamente especificados.

El trabajo analiza las implicaciones del método de las dos etapas. Específicamente, se obtienen las restricciones que deben afectar al modelo conjunto de las innovaciones. Se discute la solución general implícita en las dos etapas, y se concluye que el método tiende a conducir, o a soluciones empíricamente disparatadas (como puede apreciarse en Granger y Newbold (1977)), o a modelos teóricamente inconsistentes (ejemplo de los cuales se encuentran en Jenkins (75 y 79)). Finalmente, el trabajo presenta algunas breves conclusiones sobre la posibilidad de una identificación directa.

1.- EL MODELO

Para simplificar la discusión y los ejemplos, nos ceñiremos a los modelos bivariantes. Supondremos que las series son estacionarias.

En su forma más general, el modelo bivariante viene dado por:

$$\underline{Z}_t = \xi(B)\ \underline{a}_t \quad , \tag{1.1}$$

donde B es el operador de retardos, $\underline{Z}_t = (Z_{1t}, Z_{2t})'$, $\underline{a}_t = (a_{1t}, a_{2t})'$ y $\xi(B)$ es la matriz (2x2):

$$\xi(B) = \begin{pmatrix} \xi_{11}(B) & \xi_{12}(B) \\ \xi_{21}(B) & \xi_{22}(B) \end{pmatrix} \quad . \tag{1.2}$$

con elemento típico:

$$\xi_{ij}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_{ij}^{k}\ B^{k} \quad ,$$

cumpliéndose:

$$\xi_{ij}^{0} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } i=j \\ 0 & \text{cuando } i\neq j \end{cases} \quad .$$

El vector $\underline{a}_t$ es un vector de variables ruido blanco, y su matriz de covarianza es:

$$\Sigma \otimes I \ ,$$

donde $\otimes$ es el producto de Kronecker, y Σ es la matriz definida positiva:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \ ,$$

que representa la covarianza contemporánea de a_1 y a_2.

Supondremos que la matriz $\xi(B)$ puede escribirse:

$$\xi(B) = \phi(B)^{-1} \theta(B) \ ,$$

donde $\phi(B)$ y $\theta(B)$ son matrices (2x2) con elementos típicos:

$$\phi_{ij}(B) = \sum_{k=0}^{p_{ij}} \phi_{ij}^k B^k$$

$$\theta_{ij}(B) = \sum_{k=0}^{q_{ij}} \theta_{ij}^k B^k \ ,$$

tales que:

$$\phi_{ij}^0 = \theta_{ij}^0 = \begin{cases} 1 \text{ para } i=j \\ 0 \text{ para } i \neq j \end{cases} \ .$$

El modelo (1.1) puede escribirse por tanto:

(1.3) $$\phi(B) \ \underline{Z}_t = \theta(B) \ \underline{a}_t \ ,$$

que denominaremos proceso bivariante ARMA (P,Q), siendo P y Q las matrices

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} , \qquad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

El problema que nos interesa es el de especificar ("identificar") el modelo del tipo (1.3) que genera una serie temporal dada (z_{1t}, z_{2t}). Es decir, dadas las series temporales, inferir las matrices P y Q que caracterizan el proceso ARMA bivariante de las series.

2.- LA ESPECIFICACION DEL MODELO EN DOS ETAPAS

El análisis de series temporales univariantes por el procedimiento Box-Jenkins alcanzó tal popularidad en años recientes que la generalización del método a series multivariantes se convirtió en un problema de gran interés. En 1972 Haugh publica una tesis en la que se expone el método que va a servir de fundamento para la identificación de modelos ARMA multivariantes. El método en forma muy esquemática, puede resumirse en dos etapas. La primera produce los modelos univariantes de cada una de las series; que representaremos como:

$$(2.1) \qquad Z_{it} = \lambda_i (B) \alpha_{it},$$

donde α_{it} es la innovación del proceso univariante, y por tanto ruido blanco. La segunda etapa proporciona el modelo conjunto para las innovaciones:

$$(2.2) \qquad \underline{\alpha}_t = \Psi(B) \underline{a}_t,$$

donde $\Psi(B)$ es la matriz, de orden (2x2)

$$(2.3) \qquad \Psi(B) = \begin{pmatrix} \Psi_{11}(B) & \Psi_{12}(B) \\ \Psi_{21}(B) & \Psi_{22}(B) \end{pmatrix} .$$

Juntando las expresiones (2.1) y (2.2), se obtiene finalmente el modelo final identificado:

$$(2.4) \qquad \underline{Z}_t = \Lambda(B)\ \Psi(B)\ \underline{a}_t = \xi(B)\ \underline{a}_t \quad ,$$

donde $\Lambda(B)$ es la matriz diagonal:

$$\Lambda(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1(B) & 0 \\ 0 & \lambda_2(B) \end{pmatrix}$$

y, por tanto

$$(2.5) \qquad \xi(B) = \Lambda(B)\ \Psi(B).$$

La razón de esta descomposición en dos etapas es que la función de correlación cruzada entre las variables Z_{it} está "contaminada" por las autocorrelaciones de estas variables, y es por tanto de difícil interpretación. Sin embargo, este tipo de contaminación estará ausente en las funciones de correlación cruzada de las innovaciones.

Concretamente, una propiedad muy importante del análisis de la correlación cruzada de las innovaciones es que, si dicha función de correlación toma valores distintos de cero sólo para retardos positivos (o sólo para retardos negativos), se puede expresar el modelo como una simple relación dinámica del tipo (por ejemplo):

$$Z_{2t} = \psi_0(B)\ Z_{1t} + \psi_1(B)\ a_{1t} \quad ,$$

a la que se pueden aplicar técnicas de identificación y estimación ya en uso. Este tipo de modelos se ha llamado también modelos multivariantes con causalidad unidireccional.

Cuando la función de correlación cruzada entre las innovaciones presenta valores distintos de cero para retardos positivos y negativos, el modelo no se puede trasladar a una simple relación dinámica; se trata en estos casos de modelos con "feedback" y la causalidad opera en ambas direcciones.

Para estos últimos modelos (los modelos multivariantes en general) la segunda etapa del proceso de identificación se complica considerablemente. Así, Haugh en su tesis se limita simplemente a ilustrar algunas características de las funciones de correlación cruzada de las innovaciones para unos ejemplos simples. Indica explícitamente que la identificación de modelos multivariantes con "feedback" no es el objetivo de su tesis. En un trabajo posterior, Haugh y Box vuelven a sugerir que el método de las dos etapas puede aplicarse a modelos multivariantes en general, pero no tratan el tema directamente.

Sirva ésto de introducción. Nuestro objetivo es, por un lado, afirmar que el problema, a pesar de algunas contribuciones posteriores (*), sigue sin ofrecer soluciones aceptables, y por otro, que ésto no es de extrañar, pues el problema presenta dificultades muy serias, que en ocasiones, el método de las dos etapas no hace sino agravar.

(*) Ver el anexo.

3.- LAS RELACIONES ENTRE LAS DOS ETAPAS

Intuitivamente, el procedimiento de las dos etapas es atractivo y su aplicación parece relativamente simple. Primero se obtiene con el análisis univariante la parte de cada variable que puede explicarse simplemente por su propio pasado. Y es la parte que no queda explicada por este pasado la que se intenta relacionar con otras variables (presentes y pasadas).

Sin embargo, la aplicación correcta del procedimiento de las dos etapas requiere tener presente una serie de consideraciones que pasamos a comentar.

3.1.- Las series univariantes

Es sabido que un determinado proceso ARMA multivariante implica procesos ARMA univariantes específicos para las series individuales.

Por ejemplo, si el proceso multivariante es de tipo Markoff, las series individuales serán ARMAS de orden (p, p-1), donde p es el número de variables del modelo (*).

También es sabido que si el proceso multivariante es media móvil (MA), y el orden de los polinomios de la matriz $\xi(B)$ de (1.2.) es:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

entonces las series individuales son procesos MA de órdenes $\max_i h_{1i}$ y $\max_i h_{2i}$, respectivamente.

(*) Ver Quenouille (68, p. 38). Si el proceso se representa en forma "state space" y el vector de variables estado es de orden p, las series individuales de las variables observadas siguen también procesos univariantes ARMA (p, p-1). (Ver Mehra y Cameron (77)).

3.2.- El modelo multivariante de las innovaciones

La etapa segunda identifica el modelo multivariante para las innovaciones, dado por la ecuación (2.2).

Pero el análisis debe ser cuidadoso en la especificación del modelo, porque el hecho de que las variables α son innovaciones implica restricciones importantes sobre la forma del modelo. Estas restricciones pueden expresarse en los dos resultados siguientes. Reescribamos (2.2) de la siguiente forma:

$$(3.5) \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{1t} \\ \alpha_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{11}(B) & \Psi_{12}(B) \\ \Psi_{21}(B) & \Psi_{22}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$$

Resultado 1: Una condición necesaria para que las variables α sean ruido blanco es que:

a) los polinomios $\Psi_{11}(B)$ y $\Psi_{12}(B)$ tengan el mismo orden, y

b) los polinomios $\Psi_{21}(B)$ y $\Psi_{22}(B)$ tengan el mismo orden.

La prueba de este resultado es sencilla. Sea f_{ij} el orden del polinomio $\Psi_{ij}(B)$.

Supongamos, por ejemplo, que $f_{11}>f_{12}$. De la ecuación

$$(3.6) \qquad \alpha_{1t} = \Psi_{11}(B)\ a_{1t} + \Psi_{12}(B)\ a_{2t} \quad ,$$

resulta que la autocorrelacion de α_1 para el retardo f_{11} es igual a:

$$\gamma_1(f_{11}) = \Psi_{11}^{f_{11}} \sigma_1^2 \quad ,$$

donde $\Psi_{11}^{f_{11}}$ es el coeficiente de $B^{f_{11}}$ en el polinomio $\Psi_{11}(B)$. Puesto que $\gamma_1(f_{11}) \neq 0$, α_1 no puede ser ruido blanco.

Si $f_{11} < f_{12}$, se demuestra que la autocorrelación de α_1 para el retardo f_{12} es igual a:

$$\gamma_1(f_{12}) = \Psi_{12}^{f_{12}} \sigma_{12} \quad ,$$

donde $\Psi_{12}^{f_{12}}$ es el coeficiente $B^{f_{12}}$ en el polinomio $\Psi_{12}(B)$. Así pues, α_1 tampoco sería en este caso ruido blanco.

Resultados semejantes se obtienen para la autocorrelación de α_2 (*).

De este modo, al modelizar el proceso conjunto de las innovaciones, tiene que resultar un modelo en el que los elementos de la misma fila de la matriz que resulta cuando el modelo se expresa en forma MA sean todos polinomios del mismo orden.

El resultado no es trivial. Las aplicaciones que se encuentran en la literatura incorporan a veces esta restricción (ver, por ejemplo, la discusión de Pierce (79) para un caso específico), pero en ocasiones el analista la ignora completamente y su modelo refleja la contradicción interna de que si la primera etapa es correcta, la segunda es incorrecta, y viceversa. Ejemplos destacados de este error de especificación se encuentran en Jenkins (75) y Jenkins (79).

(*) Si el modelo inicial se parametriza con matriz Σ diagonal y, en consecuencia, $\theta_{ij}^0 = 1$ para $i \neq j$, el resultado 1 sería:

$$|\text{orden de } \psi_{i1}(B) - \text{orden } \psi_{i2}(B)| \leq 1 \quad , \text{ para } i=1,2.$$

El resultado 1 menciona simplemente una condición necesaria para que las α sean ruido blanco. Para ver las condiciones suficientes, consideremos primero el caso sencillo del modelo:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1t} \\ \alpha_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\psi_{11}B & -\psi_{12}B \\ -\psi_{21}B & 1-\psi_{22}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Puesto que la primera ecuación del sistema es:

$$\alpha_{1t} = a_{1t} - \psi_{11}\, a_{1,t-1} - \psi_{12}\, a_{2,t-1} \quad ,$$

se obtiene que la función de autocovarianza de α_{1t} viene dada por:

$$\gamma_1(0) = (1+\psi_{11}^2)\sigma_1^2 + 2\psi_{11}\,\psi_{12}\,\sigma_{12} + \psi_{12}^2\,\sigma_2^2$$

$$\gamma_1(1) = -\psi_{11}\,\sigma_1^2 - \psi_{12}\,\sigma_{12}$$

$$\gamma_1(k) = 0 \ , \qquad \text{para } k>1$$

$$\gamma_1(-k) = \gamma_1(k).$$

El requisito de que α_{1t} sea ruido blanco implica que la restricción:

$$\psi_{11}\,\sigma_1^2 + \psi_{12}\,\sigma_{12} = 0 \tag{3.8a}$$

ha de cumplirse. Análogamente α_{2t} será ruido blanco cuando:

$$\psi_{22}\,\sigma_2^2 + \psi_{21}\,\sigma_{12} = 0. \tag{3.8b}$$

Por lo tanto, la especificación correcta del modelo requiere, que además de la condición de igualdad de los órdenes de los polinomios que mencionamos, se cumplan unas restricciones no-lineales entre los parámetros del modelo identificado.

El ejemplo simplemente ilustra el resultado general siguiente:

Resultado 2: Las condiciones necerias y suficientes para que las variables α del modelo (3.5) sean ruido blanco son las restricciones no lineales implicadas en las siguientes identidades:

$$(3.9) \qquad \Psi_{ii}(F)\ \Psi_{ii}(B)\ \sigma^2_{ii} + \sigma_{ij}\left[\Psi_{ij}(F)\Psi_{ii}(B)+\Psi_{ij}(B)\Psi_{ii}(F)\right] +$$

$$+ \Psi_{ij}(F)\ \Psi_{ij}(B)\ \sigma^2_{jj} = \sigma^2_{\alpha_i} \quad ,$$

donde $F = B^{-1}$, y $i,j = 1,2$.

La prueba de este resultado se basa en que, si en (2.2) tomamos las funciones de covarianzas a la derecha y a la izquierda de la igualdad, se obtiene:

$$(3.10) \qquad \Sigma_\alpha(B) = \Psi(F)\ \Sigma\Psi(B)^T \quad ,$$

donde Σ_α y Σ son las matrices de covarianza de $\underline{\alpha}$ y $\underline{a}$, respectivamente. La condición necesaria y suficiente para que las α sean ruido blanco es que los elementos de la diagonal principal de ambos lados de (3.10) sean iguales, e igual a una constante (independiente de B). Las dos identidades en (3.9) reflejan esta condición.

Por supuesto, cada identidad se traduce en varias ecuaciones, que reflejan las condiciones de que los coeficientes de B, B^2, B^3, etc, de la parte derecha de (3.10) han de ser cero. (Para el ejemplo que vimos, se trataría de las ecuaciones (3.8 a y b)).

Una implicación importante del resultado 2 es el siguiente:

Resultado 3: Conocidos los polinomios $\Psi_{11}(B)$, $\Psi_{22}(B)$ y la matriz Σ, los polinomios $\Psi_{12}(B)$ y $\Psi_{21}(B)$ quedan totalmente determinados.

Considerando (3.9), la prueba es inmediata (*). Resulta, pues, que en términos de la segunda etapa del proceso de identificación, dejando a un lado las constantes, solamente tenemos libertad para identificar "medio" modelo. El otro "medio" queda entonces automáticamente determinado. En términos de (2.2) sólo un elemento por fila de la matriz $\psi(B)$ tendría que ser identificado (nos referimos siempre al modelo bivariante). En el ejemplo anterior, el caso más sencillo posible, las ecuaciones (3.8 a y b) pueden resolverse para Ψ_{12} y Ψ_{21}.

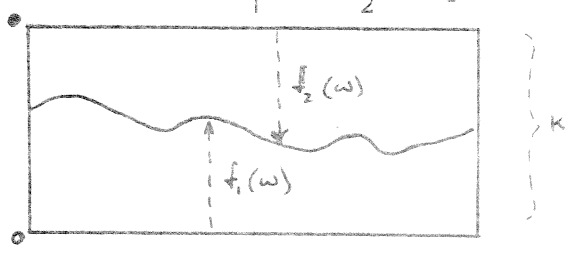
(*) Si adoptamos la parametrización equivalente:

$$\Sigma = \text{diagonal} \; ; \quad \theta^0_{12} = \theta^0_{21} = 1,$$

el resultado 3 se deriva fácilmente en el dominio de las frecuencias. En este caso, la independencia de a_1 y a_2 implica que, en términos de las expresiones (3.6) equivale a:

$$f_2(\omega) = k - f_1(\omega),$$

donde $f_1(\omega)$ es el espectro de $\psi_{1i}(B)a_{it}$ y k es una constante (igual al espectro de α_{1t}). Para k fijo, tal como indica la figura, una vez conocido $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ queda automáticamente determinado.



Resulta, pues, que el método de identificación de las dos etapas nos lleva a establecer un modelo para las innovaciones univariantes que debe satisfacer una serie de requisitos. Por un lado, las órdenes de los polinomios deben cumplir el requisito del resultado 1 y por otro, los parámetros deben satisfacer las restricciones del resultado 2. Si el modelo para las innovaciones se estima por un método de máxima verosimilitud, tal y como recomiendan Granger y Newbold, resulta prácticamente imposible incorporar estas restricciones. Pero incluso si dicho modelo sólo se usa en la etapa de identificación, es fácil comprobar que las restricciones para los parámetros del modelo de las innovaciones se traducen en restricciones similares para los parámetros del modelo finalmente identificado.

En consecuencia, la aplicación correcta del método de las dos etapas resulta hoy impracticable. Por un lado, los programas disponibles no permiten la estimación máximo verosímil de los modelos ARIMA multivariantes sujetos a restricciones no lineales. Por otro lado, modificar los programas para incorporar estas restricciones resulta impracticable dada la complejidad que éstas presentan.

Cabe pensar que, puesto que en definitiva, todo el análisis de series temporales se basa en aproximaciones, el hecho de que el modelo multivariante para las innovaciones univariantes se especifique incorrectamente no tiene demasiada importancia. Pero lo cierto es que antes de hacer una cosa mal conviene preguntarse si realmente merece la pena hacerla.

No cabe duda de que en el análisis de series multivariante, las correlaciones cruzadas entre las innovaciones univariantes son informativas. Fundamentalmente porque nos permiten detectar la presencia o ausencia de "feedback". Pero, una vez establecido que existe "feedback", tiene poco sentido identificar el modelo final juntando los modelos

univariantes con un modelo multivariante (en general mal especificado) para las innovaciones univariantes. Esto resulta particularmente cierto para el caso de modelos de medias móviles, a cuyo análisis dedicamos la sección siguiente.

4.- LOS MODELOS MULTIVARIANTES DE MEDIAS MOVILES

Para el análisis que realizaremos basta considerar el caso mas sencillo; la generalización a medias móviles de órdenes más elevadas no presenta ninguna diferencia conceptual.

Nos preguntaremos la siguiente cuestión: sea el modelo bivariante de las series el dado por:

$$(4.1) \qquad \begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\theta_{11}B & -\theta_{12}B \\ -\theta_{21}B & 1-\theta_{22}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$$

con matriz de covarianzas contemporáneas de a_1 y a_2 igual a:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} .$$

¿Cómo puede identificarse dicho modelo mediante el procedimiento de las dos etapas?.

El modelo queda completamente caracterizado (en el dominio temporal) por las funciones de autocovarianza y covarianza cruzada de las variables Z_1 y Z_2, que denominaremos FAC y FCC, respectivamente.

La FAC de Z_1 toma los valores:

$$(4.2\ a) \qquad \gamma_1(0) = (1+\theta_{11}^2)\sigma_1^2 + \theta_{12}^2\ \sigma_2^2 + 2\theta_{11}\ \theta_{12}\ \sigma_{12}$$

(4.2 b) $\gamma_1(1) = -\theta_{11}\,\sigma_1^2 - \theta_{12}\,\sigma_{12}$

$\gamma_1(-1) = \gamma_1(1)$

y es igual a cero para cualquier otro retardo.

La FCC entre Z_1 y Z_2 toma los valores:

(4.3a) $\gamma_{12}(0)=(1+\theta_{11}\theta_{22}+\theta_{12}\theta_{21})\sigma_{12}+\theta_{11}\theta_{21}\sigma_1^2+\theta_{12}\theta_{22}\sigma_2^2$

(4.3b) $\gamma_{12}(1)=-\theta_{21}\sigma_1^2-\theta_{22}\sigma_{12}$

(4.3c) $\gamma_{12}(-1)=-\theta_{12}\sigma_2^2-\theta_{11}\sigma_{12}$

y es igual a cero para cualquier otro retardo. Finalmente, la FAC de Z_2 es similar a la de Z_1, con valores distintos de cero solamente para $\gamma_2(0)$, $\gamma_2(1)$ y $\gamma_2(-1)$.

Sean α_{1t} y α_{2t} las innovaciones de los procesos univariantes de Z_{1t} y Z_{2t}, respectivamente. Las FAC de Z_1 y Z_2 implican que las series univariantes siguen procesos MA(1), que podemos representar como:

(4.4) $$\begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda_1 B & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1t} \\ \alpha_{2t} \end{pmatrix} .$$

Queda, pues, por determinar el proceso bivariante para α_1 y α_2.

Veamos primero si es posible que $\underline{\alpha}$ siga un proceso de media móvil:

(4.5) $$\underline{\alpha}_t = \begin{pmatrix} \Psi_{11}(B) & \Psi_{12}(B) \\ \Psi_{21}(B) & \Psi_{22}(B) \end{pmatrix} \underline{a}_t = \Psi(B)\underline{a}_t$$

En virtud del resultado 1 sabemos que $\Psi_{11}(B)$ y $\Psi_{12}(B)$ tienen el mismo orden, y lo mismo les sucede a $\Psi_{21}(B)$ y $\Psi_{22}(B)$. Puesto que el modelo (4.1) es simétrico con respecto a Z_1 y Z_2, se sigue que todos los elementos de la matriz $\Psi(B)$ deberán tener el mismo orden, que designaremos m. En este sentido, diremos que $\underline{\alpha}_t$ sigue un proceso MA de orden m.

El problema consiste por tanto en determinar qué valor de m produce un modelo (4.5) que, al introducirlo en (4.4) produce el modelo (4.1).

Evidentemente, si m=0, resulta

$$\gamma_{12}(1) = \gamma_{12}(-1) = 0,$$

lo cual contradice (4.3 b y c). Así pues, debe suceder que $m \geq 1$.

A primera vista esto parece crear una paradoja. Si $m \geq 1$, al sustituir (4.5) en (4.4) resulta un modelo (4.1) con elementos en la matriz $\theta(B)$ de orden superior a 1. La primera ecuación de (4.1) será:

$$Z_{1t} = (1-\lambda_1 B)\ \Psi_{11}(B)\ a_{1t} + (1-\lambda_1 B)\ \Psi_{12}(B)\ a_{2t} \quad ,$$

y Z_{1t} parece seguir entonces un proceso univariante MA de orden (m+1), lo cual contradice (4.4). Pero el hecho de que $\underline{\alpha}_t$ es un vector de innovaciones garantiza que esto no sucede, como demuestra el siguiente resultado.

Resultado 4: Sea $\underline{\alpha}_t$ un vector de innovaciones cuya representación multivariante es:

$$\underline{\alpha}_t = \Psi(B)\ \underline{a}_t \quad ,$$

en la que todos los elementos de la matriz $\Psi(B)$ son del mismo orden m. Sea $\Lambda(B)$ una matriz diagonal, cuyos elementos distintos de cero son de orden q. Las series Z_{it} del proceso multivariante

$$\underline{Z}_t = \Lambda(B)\ \Psi(B)\ \underline{a}_t \tag{4.6}$$

son procesos univariantes MA de orden q.

Demostración: Puesto que el vector $\underline{\alpha}_t$ es un vector de innovaciones, el resultado 2 nos dice que los elementos de la diagonal principal de la matriz:

$$G(B) = \Psi(F)\ \ \Sigma\Psi(B)^T$$

son constantes (es decir, polinomios de orden cero en B). La función de covarianzas de (4.6) es igual a

$$\Gamma(B) = \Lambda(F)\ \Psi(F)\ \Sigma\Psi(B)^T\ \Lambda(B)^T$$

es decir, igual a:

$$\Gamma(B) = \Lambda(F)\ G(B)\ \Lambda(B)^T.$$

Puesto que $\Lambda(B)$ es diagonal y los elementos de la diagonal principal de $G(B)$ son constantes, se sigue que el elemento de la diagonal principal de $\Gamma(B)$, $\gamma_i(B)$, es igual a:

$$\gamma_i(B) = \lambda_i(B)\ \lambda_i(F)\ \sigma^2_{\alpha_i} \quad ,$$

donde $\sigma^2_{\alpha_i}$ es la constante correspondiente de la diagonal principal de G(B). Por tanto, Z_{it} es un proceso MA de orden q (el orden de $\lambda_i(B)$).

El resultado 4 nos dice, en forma heurística, que, en modelos multivariantes, la superposición de dos modelos MA de orden q y m, no produce un modelo MA de orden (q+m) cuando uno de los modelos es un proceso de innovaciones. Esto es consecuencia de las restricciones que deben ser satisfechas por el modelo multivariante para las innovaciones.

Resulta, pues, que un modelo MA(m) para las innovaciones con m≥1 es compatible con la estructura de las FAC de (4.1). Supongamos que m=1, es decir,

$$(4.7) \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{1t} \\ \alpha_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\Psi_{11}B & -\Psi_{12}B \\ -\Psi_{21}B & 1-\Psi_{22}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix} \quad .$$

Combinando (4.7) con (4.4) resulta el modelo:

$$(4.8) \qquad \begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\Psi_{11}B)(1-\lambda_1 B) & -\Psi_{12}(1-\lambda_1 B)B \\ -\Psi_{21}(1-\lambda_2 B)B & (1-\Psi_{22}B)(1-\lambda_2 B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$$

Es fácil confirmar que la FAC de Z_{1t} toma valores distintos de cero solamente para retardos iguales a 0, 1 -1, y que

$$\gamma_1(2) = \lambda_1\ (\Psi_{11}\ \sigma_1^2 + \Psi_{12}\ \sigma_{12})$$

se anula puesto que, al ser α_{1t} ruido blanco, la relación (3.8 a) tiene que cumplirse. Un resultado similar se obtiene para la FAC de Z_{2t}.

Si analizamos la FCC entre Z_1 y Z_2, nos encontramos con valores distintos de cero para los retardos, 0, 1 y -1, de acuerdo con las ecuaciones (4.3a, b, y c), pero para retardos iguales a 2 y -2 se obtiene

(4.9 a) $$\gamma_{12}(2) = \lambda_2(\Psi_{22}\,\sigma_{12} + \Psi_{21}\,\sigma_1^2)$$

(4.9 b) $$\gamma_{12}(-2) = \lambda_1(\Psi_{11}\,\sigma_{12} + \Psi_{12}\,\sigma_2^2) \quad ,$$

expresiones que serán distintas de cero. Así pues, el modelo (4.8) no será nunca equivalente a (4.1), aún cuando las restricciones sobre el modelo de las innovaciones se satisfagan.

Resulta, pues, que para que (4.8) identifique el modelo correcto (4.1) es preciso que $\gamma_{12}(j)$ para j=2,-2, de (4.9), se anule. Resulta, por tanto, que para que los parámetros del modelo de las innovaciones estuvieran en consonancia con las FAC y la FCC del modelo correcto, las siguientes condiciones tendrían que cumplirse:

$$\Psi_{11}\,\sigma_1^2 + \Psi_{12}\,\sigma_{12} = 0$$
$$\Psi_{22}\,\sigma_2^2 + \Psi_{21}\,\sigma_{12} = 0$$
$$\Psi_{21}\,\sigma_1^2 + \Psi_{22}\,\sigma_{12} = 0$$
$$\Psi_{12}\,\sigma_2^2 + \Psi_{11}\,\sigma_{12} = 0 \quad .$$

Resolviendo el sistema para los parámetros Ψ el función de las varianzas, el Jacobiano del sistema es igual a:

$$|J| = |\Sigma|^2$$

donde $|\Sigma|$ es el determinante de la matriz Σ . Como consecuencia, el modelo

$$\underline{\alpha}_t = \Psi(B)\ \underline{a}_t$$

queda completamente determinado a priori excepto en lo relativo a la matriz Σ . Así pues, $\Psi(B)$ sería el mismo cualesquiera que fuesen los valores de las θ_{ij}. Esto, evidentemente, no tiene sentido: mientras que el modelo a identificar contiene 4 parámetros (sin contar Σ), el modelo (4.8) contiene sólo 2, los λ_i, puesto que los Ψ_{ij} están ya determinados.

En consecuencia tiene que ser $m \geqslant 2$. Si $m=2$ el mismo razonamiento puede aplicarse. La FCC no se anulará para retardos iguales a 2, 3, -2 y -3. Si se impone la condición de que estas correlaciones se anulen, toda la matriz $\Psi(B)$ queda determinada con independiencia de $\theta(B)$. Y lo mismo sucede para cualquier otro valor de m.

La conclusión es, pues, que el modelo MA(1) de (4.1) no puede nunca identificarse mediante un modelo MA paras las innovaciones. Si partimos de un modelo MA más complicado en (4.1), el mismo razonamiento lleva a la siguiente conclusión:

<u>Resultado 5</u>: Un proceso MA multivariante no puede ser nunca identificado como un proceso MA para las innovaciones de sus series univariantes (*).

(*) El resultado 5 puede formularse alternativamente : si bien procesos univariantes MA junto con un proceso MA para sus innovaciones producen un modelo multivariante MA para las series, lo contrario en general no será cierto. De hecho, más formalmente, si el espacio de los parámetros está limitado a priori por las restricciones debidas a la estacionalidad e invertibilidad, el conjunto de modelos MA que pueden identificarse como el resultado de procesos MA en las dos etapas tiene medida Lebesgue cero.

Lo que el resultado 5 nos dice es lo siguiente: un proceso multivariante MA nos produce series univariantes que son también MA. Sin embargo, el modelo para las innovaciones de estas series no puede ser MA, sino que tendrá una estructura más compleja. Antes de ver cuál puede ser esta estructura haremos unas consideraciones generales.

5.- LOS PELIGROS DE LAS DOS ETAPAS

Sea el modelo multivariante:

$$\phi(B)\ \underline{Z}_t = \theta(B)\ \underline{a}_t \quad , \tag{5.1}$$

y escribamos:

$$\phi(B)^{-1} = \tilde{\phi}(B)\,|\phi(B)|^{-1} \quad ,$$

donde $|\phi(B)|$ es el determinante de $\phi(B)$, y $\tilde{\phi}(B)$ es la matriz traspuesta de los cofactores de los elementos de $\phi(B)$. La ecuación (5.1) puede reescribirse:

$$|\phi(B)|\ \underline{Z}_t = \tilde{\phi}(B)\ \theta(B)\ \underline{a}_t \quad .$$

Puesto que cada fila de la matriz $\tilde{\phi}(B)\ \theta(B)$ es una suma finita de medias móviles, será por tanto equivalente a un proceso simple de media móvil. Así pues, podemos escribir:

$$|\phi(B)|\ \underline{Z}_t = \theta^*(B)\ \underline{\alpha}_t \quad , \tag{5.2}$$

donde $\theta^*(B)$ es una matriz diagonal y $\underline{\alpha}_t$ es el vector de las innovaciones univariantes. El sistema de ecuaciones (5.2) representa, por tanto, la serie de modelos univariantes implicados por el modelo multivariante (5.1). Es importante señalar que si este último satisface las condiciones de estacionariedad e invertibilidad, las expresiones $|\phi(B)|$ y $\theta^*(B)$

están determinadas de manera única por (5.1). Esto implica que, a menos que $|\phi(B)|$ y alguno de los elementos $\theta^*(B)$ tengan raíces comunes, la representación univariante (5.2) es única. Como consecuencia, las series univariantes identificadas en la primera etapa tienen que tener una representación del tipo (5.2).

De lo expuesto se deduce también que el modelo multivariante para las innovaciones $\underline{\alpha}_t$ es el dado por el proceso:

$$\theta^*(B)\ \underline{\alpha}_t = \tilde{\phi}(B)\ \theta(B)\ \underline{a}_t \quad . \tag{5.3}$$

En efecto, sustituyendo (5.3) en (5.2) se obtiene finalmente (5.1). Una consecuencia del análisis es, obviamente, que el máximo orden de los elementos de cada fila de la matriz $\tilde{\phi}(B)\ \theta(B)$ tiene que ser igual al orden del elemento de la fila correspondiente de $\theta^*(B)$.

Cuando se trata de un modelo MA, y (5.1) se reduce a:

$$\underline{Z}_t = \theta(B)\ \underline{a}_t \quad ,$$

las expresiones (5.2) y (5.3), correspondientes a las dos etapas de la identificación, se simplifican. Las series univariantes vienen dadas por:

$$\underline{Z}_t = \theta^*(B)\ \underline{\alpha}_t \quad , \tag{5.4}$$

y el modelo multivariante para las innovaciones se convierte en:

$$\theta^*(B)\ \underline{\alpha}_t = \theta(B)\ \underline{a}_t \quad . \tag{5.5}$$

Volviendo a nuestro modelo (4.1), la ecuación (5.4) es simplemente (4.4). Pero la expresión (5.5) se convierte en:

$$(5.6) \qquad \underline{\alpha}_t = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\theta_{11}B}{1-\lambda_1 B} & \dfrac{-\theta_{12}B}{1-\lambda_1 B} \\ \\ \dfrac{-\theta_{21}B}{1-\lambda_2 B} & \dfrac{1-\theta_{22}B}{1-\lambda_2 B} \end{pmatrix} \underline{a}_t \ ,$$

y se confirma fácilmente que (5.6) y (4.4) implican (4.1).

El ejemplo ilustra lo siguiente:

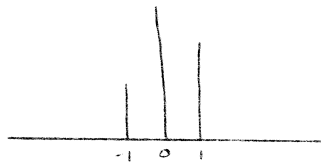
1.- Un modelo multivariante sencillo implica la identificación en la segunda etapa de un modelo bastante más complicado:

Mientras que la FCC de Z_1 y Z_2 viene dada por (4.3), y sólo es distinta de cero para retardos -1, 0 y 1, la FCC de α_1 y α_2 viene afectada por los factores $(1-\lambda_1 F)(1-\lambda_2 B)$. Concretamente, puede comprobarse que:

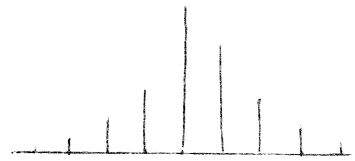
$$(1-\lambda_1 F)(1-\lambda_2 B)\ \gamma_{\alpha_1\alpha_2}(k) = \begin{cases} \gamma_{12}(1) & \text{para } k=1 \\ \gamma_{12}(0) & \text{para } k=0 \\ \gamma_{12}(-1) & \text{para } k=1 \\ 0 & |k|>1 \end{cases}$$

donde $\gamma_{\alpha_1\alpha_2}(k)$ es la FCC de α_1 y α_2.

Es decir, la FCC de α_1 y α_2 consistirá de tres picos para los valores -1, 0 y 1, y decrecimiento exponencial a la derecha y a la izquierda.



FCC de Z_1 y Z_2



FCC de α_1 y α_2

Si el instrumento básico de la identificación del modelo multivariante es la FCC, queda claro que el método de las dos etapas simplemente oscurece la imagen.

2.- Además del problema anterior, las dos etapas presentan otro grave problema que deriva de una consideración empírica. La aplicación del método de las dos etapas puede producir fácilmente identificaciones incorrectas debido a la sobreparametrización. Con esto queremos decir que, debido a la variabilidad muestral, los estimadores de λ_1 y λ_2 en (4.4) para una muestra concreta, en general no serán idénticos a los estimadores de λ_1 y λ_2 obtenidos en (5.6). Con lo cual , no se cancelarían las expresiones $(1-\lambda_1 B)$ y $(1-\lambda_2 B)$, y el modelo aparentemente identificado para $\underline{Z}_t$ tendría elementos del tipo:

$$\frac{1-\xi_{11}B-\xi_{12}B^2}{1-\xi_{01}B} \quad y \quad \frac{-\xi_{13}B-\xi_{14}B^2}{1-\xi_{02}B}$$

Además de la especificación incorrecta, puesto que los polinomios del numerador y denominador tendrían raíces cercanas, los estimadores de los parámetros resultarían muy inestables.

6.- ALGUNAS CONCLUSIONES

En la sección anterior hemos concluído lo siguiente:

a.- El modelo conjunto para las innovaciones univariantes implicado por un proceso multivariante es relativamente complicado, incluso para los casos más simples de modelos multivariantes. En general, el modelo para las innovaciones es bastante más complejo que el modelo multivariante para las series. Así pues, el método de las dos etapas, en lugar de simplificar, complica el proceso de identificación.

b.- Es prácticamente imposible que la información muestral (para las series temporales de que normalmente se dispone) permita identificar el modelo correcto, puesto que ello implica que se anulen entre sí varios de los factores identificados en la primera y segunda etapas.

El uso del procedimiento de las dos etapas en la identificación de modelos multivariantes parece, pues, el producto de una intuición errónea. Queda pendiente, sin embargo, el desarrollo de una metodología sistemática para identificar modelos multivariantes. De todos modos, es posible que esta metodología sistemática tampoco sea muy necesaria, como ilustra la discusión que sigue.

Supongamos que al analizar unas series temporales, encontramos que la FAC de las series univariantes corresponden a procesos de medias móviles (finitos). Trivialmente, el proceso multivariante más general para las series queda automáticamente determinado. Por ejemplo, si se trata de dos series para las que los procesos univariantes son $MA(q_1)$ y $MA(q_2)$, el modelo multivariante será, en general

$$\begin{pmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{11}^{q_1}(B) & \theta_{12}^{q_1}(B) \\ \theta_{21}^{q_2}(B) & \theta_{22}^{q_2}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix},$$

donde los índices superiores señalan el orden del polinomio, y

$$\theta_{11}^{0} = \theta_{22}^{0} = 1$$

$$\theta_{12}^{0} = \theta_{21}^{0} = 0.$$

Así pues, para el caso de modelos multivariantes MA, la identificación multivariante queda determinada simplemente a partir de los procesos univariantes.

Si el modelo multivariante fuese simplemente autoregresivo (*), evidentemente el mejor sistema sería el de ir aumentando la matriz AR hasta que los resíduos estimados $\hat{\underline{\alpha}}_t$ se comportasen como ruido blanco.

Para situaciones de modelos ARMA más complejas, quizás la estrategia más sensata consista, esquemáticamente, en un proceso de prueba y error sobre las series originales. Primero, analizando las autocorrelaciones de las series individuales. Si el proceso no puede ser descrito por una media móvil sencilla, ensayar entonces matrices AR, progresivamente más complejas, y ajustar con matrices MA autocorrelaciones en los resíduos que no quedasen explicadas. La identificación correcta requeriría, pues, una cierta habilidad por parte del analista, pero esto no es de asustar, si se considera que la razón de ser de estos modelos descansa en que pueden ser descritos por una estructura parsimoniosa, relativamente simple. Y el requisito de ser parsimonioso

(*) Lo cual se detectaría por medio de la función de correlación parcial (ver Quenouille 57 p. 38-42).

es aún más importante para un proceso multivariante cuya complejidad, en caso contrario, los haría inmanejables.

En todo caso, creer que intentar modelizar las innovaciones univariantes puede simplificar la identificación del proceso carece totalmente de fundamento. Tan sólo nos llevará, en el mejor de los casos, a complicar el análisis innecesariamente o, más probablemente, a especificar modelos erróneos, en contradicción con las series temporales de que se disponga.

ANEXO

LA IDENTIFICACION DE SERIES TEMPORALES UNIVARIANTES (*)

La especificación o identificación de modelos multivariantes de series temporales aparece tratado ya en Quenouille (57, cap. 4), bajo el nombre de "Investigación preliminar".

En su terminología:

$$\mathrm{Cov}\ (x_{it}\ x_{jt-s}) = \gamma_{(ij)s}$$

cuyo estimador muestral se denomina $C_{(ij)s}$. De estos elementos surgen las matrices Γ_s y C_s. Quenouille sugiere utilizar en la especificación del modelo, los determinantes $|C_s|$, el cociente $C_s C_{s-1}^{-1}$ (las raíces características) y las correlaciones parciales. A través de esta información puede identificar casos de medias móviles puras, autorregresivos puros y poco más. Por otra parte, Quenouille parte de un modelo en el que todas las ecuaciones tienen polinomios en B del mismo orden.

Como comentamos en la sección 2, Haugh (72) y Haugh-Box (77) sugieren el uso de un método basado en la descomposición en dos etapas. (Una primera univariante, y una segunda en la que se modelizan las innovaciones univariantes). Pero no llegan a desarrollar ningún método específico.

Granger y Newbold (77, cap. 7) ofrecen una solución basada en las dos etapas. El método es de una complejidad espantosa. Reparametrizando el modelo en cierta forma, es posible obtener "medio" modelo para las innova-

(*) En este trabajo utilizamos los términos "identificación" y "especificación" indistintatmente, en el sentido de Box-Jenkins (70). En econometría, el término "identificación" tiene un significado diferente (ver Maravall (79, cap. 1).

ciones univariantes. Esto se hace truncando unos sistemas de ecuaciones en infinitas variables, y de las soluciones se identifican las expresiones racionales que las generan. Utilizando luego las ecuaciones implícitas en unas expresiones análogas a (3.9) obtienen la otra mitad del modelo de las innovaciones univariantes. Aparte de su complejidad (por ejemplo, la resolución de las ecuaciones análogas a (3.9) es, incluso para los casos más sencillos, de una enorme dificultad), el método para series como las que normalmente se usan, es muy impreciso. Por otra parte, los dos ejemplos que Granger y Newbold desarrollan para ilustrar el método parecen confirmar lo que comentamos anteriormente sobre los peligros de la sobreparametrización y la obtención de modelos no parsimoniosos. En el primer ejemplo, para dos series, cuyos procesos univariantes se describen con sólo dos parámetros, identifican un proceso bivariante con 15 parámetros. En el segundo ejemplo, las series univariantes incluyen tres parámetros en total, y en la segunda etapa de la identificación especifican un modelo para las innovaciones con 20 parámetros.

En resumen, el método de Granger y Newbold es impracticable, y los ejemplos que presentan parecen empíricamente disparatados.

Identificación de modelos multivariantes basada en las dos etapas aparece también en Jenkins (75, 79). A diferencia de Granger y Newbold, su metodología no es impracticable; sin embargo, contiene un error teórico. Este error deriva de no considerar las implicaciones del hecho de que en la segunda etapa de la identificación se están utilizando series de innovaciones. Así, en el artículo de 1975, la segunda etapa produce el siguiente modelo para las innovaciones:

$$\text{(A.1)} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_{1t} \\ \alpha_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -.22\ B \\ .34B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$$

lo que implica que las autocovarianzas de α_1 y de α_2, para los retardos 1(y -1), toman los valores:

$$r_1(1) = -.22 \quad \rho\, \sigma_1 \sigma_2$$

$$r_2(1) = .34 \quad \rho\, \sigma_1 \sigma_2 \ .$$

Puesto que $\rho = .45$, evidentemente $r_1(1)$ y $r_2(1)$ son distintos de cero. Por tanto, α_1 y α_2 en (A.1) son MA(1) y no innovaciones. Es decir, si la primera etapa es correcta, la segunda es incorrecta y viceversa.

En el libro de 1979 los dos ejemplos multivariantes que figuran contienen el mismo error. En el primer caso identifica, para las innovaciones univariantes, el modelo (p. 78):

$$\alpha_{1t} = a_{1t} - \theta_{12}\, a_{2t-1}$$

$$\alpha_{2t} = a_{2t} - \theta_{21}\, a_{1t-1}$$

De nuevo:

$$\gamma_1(1) = -\theta_{12}\, \sigma_{12} \neq 0$$

$$\gamma_2(1) = -\theta_{21}\, \sigma_{12} \neq 0 \ .$$

En el segundo ejemplo (p. 86), el modelo conjunto que identifica para las innovaciones univariantes es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\phi_{12}B \\ -\phi_{21}B & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1t} \\ \alpha_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$$

Puesto que

$$\alpha_{1t} = (1-\phi_{12}\ \phi_{21}\ B^2)^{-1}\ (a_{1t}+\phi_{12}\ a_{2t-1}),$$

resulta:

$$\gamma_1(1) = \frac{\phi_{12}}{1-\phi_{12}\ \phi_{21}} \quad \sigma_{12} \neq 0 \quad ,$$

y, análogamente, $\gamma_2(1)=0$. En el caso de este último modelo, las autocovarianzas de α_1 y α_2 no se hacen cero para ningún retardo finito.

Puesto que los modelos para las innovaciones están mal especificados, el modelo final identificado arrastrará el error.

Si el modelo correcto es:

$$\phi(B)\underline{Z}_t = \theta(B)\ \underline{a}_t \quad ,$$

en el que las a's están distribuídas normal, independiente e idénticamente, el método de Jenkins produce una especificación del tipo:

$$\phi(B)\ \underline{Z}_t = \theta^*(B)\ \underline{a}_t^* \quad ,$$

tal que $\theta^*(B) \neq \theta(B)$. Esto significa que si los a's son ruido blanco, los resíduos a*'s que produce el modelo estimado por Jenkins, serán iguales a:

$$\underline{a}_t^* = \theta^*(B)^{-1}\theta(B)\ \underline{a}_t \quad ,$$

y no estarán, por tanto, distribuídos normal, independiente e idénticamente. Como consecuencia, la función que Jenkins maximiza al estimar el modelo no es la función de verosimilitud correcta (y ni siquiera tiene por qué ser una aproximación)

REFERENCIAS

BOX, G.E.P. y G.M. JENKINS (1970), Time Series Analysis, Holden Day. San Francisco.

GRANGER, C.W.I. y P. NEWBOLD (1977), Forecasting Economic Time Series, Academic Press, Nueva York.

HAUGH, L.D. (1972), "The identification of time series interrelationships with special reference to dynamic regression", Ph. D. Thesis. Univ. Wisconsin, Madison.

HAUGH, L.D. y G.E.P. BOX (1977), "Identification of Dynamic Regression (Distributed Lag) Models Connecting Two Time Series", JASA, Vol. 72. N. 357. Marzo, 1977.

JENKINS, G.M. (1979), Practical Experiences with Modelling and Forecasting Time Series, G.J.P. Pub .

JENKINS, G.M. (1975), "The Interaction Between the Muskrat and Mink Cycles in North Canada". Proceedings of the 8th International Biometric Conference, Constanta, Rumanía.

MARAVALL, A. (1979), Identification in Dynamic Shock-Error Models. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, Nueva York.

MEHRA, R.K., A.V. CAMERON y H.W. FOODS (1977), "Unified State Space Forecasting for Single and Multiple Time Series Applications". Management Science, Special Issue on Forecasting, 1977.

PIERCE, D.A. (1979), "R^2 Measures for Time Series", de próxima publicación en JASA.

QUENOUILLE, M.H. (1957), The Analysis of Multiple Time-Series, Griffin, Londres, 2ª Ed. 1968.