DETERMINANTES DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS: HIPÓTESIS EXPECTACIONAL Y PRIMAS DE RIESGO

Fernando Restoy

Banco de España - Servicio de Estudios
Documento de Trabajo nº 9530

DETERMINANTES DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS: HIPÓTESIS EXPECTACIONAL Y PRIMAS DE RIESGO

Fernando Restoy

Banco de España - Servicio de Estudios
Documento de Trabajo nº 9530

El Banco de España al publicar esta serie pretende facilitar la difusión de estudios de interés que contribuyan al mejor conocimiento de la economía española.

Los análisis, opiniones y conclusiones de estas investigaciones representan las ideas de los autores, con las que no necesariamente coincide el Banco de España.

ISSN: 0213-2710
ISBN: 84-7793-430-4
Depósito legal: M-37900-1995
Imprenta del Banco de España

Resumen

En este trabajo se realiza una primera aproximación al análisis de los determinantes de la estructura temporal de los tipos de interés españoles en el periodo 1991-1995. En concreto: se evalúa la magnitud de las primas de riesgo de tipos de interés y, por lo tanto, la medida en la que los tipos forward y los tipos de interés a largo plazo en el mercado al contado pueden ser explicados por las expectativas sobre la evolución futura de los tipos a corto plazo (hipótesis expectacional). Los resultados rechazan la hipótesis expectacional en sentido estricto aunque sugieren que, al menos para horizontes de inversión moderados, las primas de riesgo son moderadas o bajas. De este modo, los tipos a largo en el mercado al contado pueden servir, para los horizontes habituales (inferiores a 10 años), como una aproximación razonable a la media de los tipos a corto esperados durante ese horizonte. Por su parte, los tipos de los contratos forward pueden proporcionar estimaciones sensatas de los tipos a corto esperados, siempre que se utilicen contratos definidos sobre tipos a plazos medianos (1 año o superior) para horizontes intermedios (inferiores a 5 años).

1. INTRODUCCIÓN

El análisis de los determinantes y la evolución de la estructura temporal de los tipos de interés es uno de los temas que más trabajos han suscitado dentro de la economía financiera, mereciendo también la atención de los macroeconomistas desde hace algunos años. En los últimos tiempos, este interés se ha acentuado como consecuencia del auge de los mercados de instrumentos derivados sobre tipos de interés, de un lado, y por la necesidad de construir nuevos indicadores de política monetaria, de otro.

En efecto: tras la crisis de las estrategias tradicionales de política monetaria basadas en el seguimiento de objetivos intermedios como un agregado monetario o el tipo de cambio, han surgido nuevas estrategias basadas en el establecimiento de objetivos directos de inflación. En este contexto, ha cobrado especial relevancia el análisis de los mecanismos de transmisión de la política monetaria desde los mercados en los que directamente interviene el banco central hasta los más relevantes para las decisiones de consumo e inversión y, por lo tanto, para la determinación de los precios y de la actividad de la economía. De este modo, el análisis de los factores que explican la relación entre tipos de interés a corto y largo plazo constituye un tema central para la política monetaria.

Dentro de este esquema, un punto de partida obligado es el contraste de la hipótesis expectacional de los tipos de interés, en la cual los tipos a largo plazo están completamente determinados por las expectativas de los agentes sobre la evolución de los tipos de interés a corto plazo. Esta hipótesis implica que los tipos a largo plazo no incorporan primas de riesgo de tipos de interés (o de liquidez), sino solamente expectativas sobre el tono futuro de la política monetaria. Un paso subsiguiente de interés consiste en estudiar la medida en que las diferencias entre los tipos de interés a largo y corto plazo (o los tipos <u>forward</u>) permiten obtener una medida de la evolución de la tasa de inflación esperada. Esta hipótesis requiere, además de la hipótesis expectacional, la ausencia de primas por riesgo inflacionario y la constancia del tipo de interés real requerido. Este trabajo se centra en la estimación del tamaño de las primas de riesgo de tipos de interés y, por lo tanto, en el análisis de la verosimilitud de la teoria expectacional en el caso español en el período 1991-1995. El problema de la obtención de expectativas de inflación es objeto de una investigación paralela.

El análisis de la relación entre tipos a corto y largo plazo se ha efectuado en la literatura desde diversos enfoques. Un primer grupo de trabajos intenta contrastar la teoría expectacional con una perspectiva empiricista analizando la capacidad de los tipos a largo para predecir de forma insesgada los tipos a corto plazo, tal y como requiere la hipótesis expectacional bajo expectativas racionales. Este es el enfoque seguido en los trabajos incluidos en la recopilación de Shiller (Shiller (1990)). Una referencia más reciente de gran influencia es Campbell y Shiller (1991).

Este enfoque plantea un problema de difícil solución en nuestro caso. Los contrastes empíricos de la hipótesis nula requieren la utilización de una muestra de tipos de interés a plazos largos medidos con periodiciad muy inferior (tipicamente mensual). Esta práctica genera un problema de superposición de información (véase Hansen y Hodrick, 1980) que dificulta la obtención de estimadores eficientes. Este problema se agrava considerablemente si la muestra disponible es reducida, como ocurre en el caso español analizado en este trabajo.

Un segundo enfoque consiste en analizar la estructura temporal sobre la base de modelos de equilibrio de valoración de bonos cupón-cero a diversos plazos. Este es el enfoque seguido por Campbell (1986) y Restoy y Weil (1995), entre otros, y difieren entre sí en el tipo de preferencias asumido para el agente representativo de la economía. Aunque estos trabajos proporcionan una base conceptual para entender los determinantes de las primas de riesgo de tipos de interés, su contraste es dificultoso al padecer los mismos problemas que caracterizan la literatura empírica sobre modelos intertemporales de valoración.

Un tercer enfoque es el que procede de la teoría de la valoración de bonos en tiempo continuo. Estos modelos permiten generar la curva de rendimientos a partir de un proceso concreto supuesto para el tipo de interés a corto plazo. La referencia seminal de esta tradición de modelos es Cox, Ingersoll y Ross (1985), que ha motivado trabajos como los de Ho y Lee (1986) y Heath, Jarrow y Morton (1992). El método seguido por estos trabajos consiste en derivar, a partir del proceso seguido por el tipo de interés y de la ausencia de oportunidades de arbitraje, el factor de descuento relevante para los flujos pagados en cada momento. De las características de ese factor de descuento depende el tamaño de las primas de riesgo de tipos de interés. De este modo, este enfoque, aunque depende crucialmente del proceso supuesto para el tipo de interés, cuenta con la ventaja de derivar la curva de rendimientos sin imponer condiciones de equilibrio, explotando una definición débil de eficiencia de los mercados financieros.

Una aportación relevante dentro del tercer enfoque es Backus y Zin (1994). Estos autores proporcionan un procedimiento empírico para estimar en tiempo discreto la distribución del factor de descuento, combinando información sobre la autocorrelación de los tipos de interés y las medias de los tipo de interés al contado a diversos plazos. En este trabajo, seguimos un procedimiento similar y utilizamos el factor de descuento estimado para obtener las primas de riesgo de tipos de interés en el caso español. En nuestro caso, sin embargo, el factor de descuento se estima a partir de la información contenida en los tipos forward a diversos horizontes. Esta práctica permite eliminar el problema relativo a la superposición de información que permanece en el método de Backus y Zin y que tan preocupante resulta en una muestra tan reducida como la disponible en estos momentos.

El trabajo se estructura como sigue. En la sección 2, se exponen las definiciones básicas y el concepto de valoración por arbitraje, y se presentan dos formulaciones alternativas de la teoria expectacional. En la sección 3, se presenta la modelización de la curva de rendimientos definiendo un proceso univariante para el factor de descuento. La sección 4 discute el procedimiento de identificación y estimación del factor de descuento. La sección 5 presenta los resultados empíricos. La sección 6 señala las conclusiones fundamentales.

2. LA VALORACIÓN DE LOS BONOS CUPÓN-CERO

2.1. Precios, tipos de interés y tipos forward

Denominemos S_t^n al precio en t de un bono cupón 0 que vence en el período t+n. La rentabilidad bruta acumulada hasta vencimiento por unidad invertida es $\frac{1}{S_t^n}$. Por su parte, la rentabilidad neta por período de ese bono puede expresarse como $i_t^n=-\log S_t^n/n$ que representa el tipo de interés al plazo n en el momento t.

Dados los tipos de interés a distintos plazos, podemos construir los tipos forward implíc tos. Así, denominando $f_t^{n,k}$ al tipo en t de un contrato forward sobre el tipo de interés al plazo k dentro de n períodos, se verifica $f_t^{n,k}=\frac{n+k}{k}\,i_t^{n+k}-\frac{n}{k}i_t^n$. Por lo tanto,

$$f_t^{n,k}=\log\left(\frac{S_t^n}{S_t^{n+k}}\right).\frac{1}{k}$$

Los tipos de interés a un determinado horizonte pueden expresarse como una media de los tipos forward a k períodos correspondientes al horizonte considerado. Es decir,

$$i_t^n=\frac{k}{n}\sum_{j=0}^{(n-k)/n} f_t^{jk,k}$$

De este modo, los precios de los bonos cupón 0 a distintos plazos, sus tipos de interés y los tipos forward implícitos contienen la misma información. Por lo tanto, determinando el precio de los bonos, será posible obtener la curva de rendimientos (tipos de interés a distintos plazos) y la curva forward (tipos forward para un plazo determinado a distintos horizontes).

2.2 Condición de no arbitraje en el mercado de bonos

Un requisito mínimo exigible al proceso de formación de precios de activos financieros es la inexistencia de oportunidades de arbitraje. Es decir, no debe ser posible realizar estrategias autofinanciadas (es decir, con coste 0) que ofrezcan beneficios positivos con probabilidad 1 (sin riesgo). De acuerdo con Harrison y Kreps (1979) y Cox y Ross (1976), la ausencia de oportunidades de arbitraje implica la existencia de una medida de probabilidad y una normalización tales que los precios normalizados de los activos financieros sigan un proceso "martingala". Es decir, bajo la nueva medida de probabilidad, el valor esperado del precio futuro debe ser igual al precio actual[1].

En el caso que nos ocupa, dada una determinada distribución de las variables que componen el conjunto de información de los agentes, la propiedad martingala implica que, en ausencia de oportunidades de arbitraje, debe existir un factor de descuento positivo, tal que el precio en un momento de un bono cupón 0 debe ser igual al valor esperado para el período siguiente del precio descontado del mismo bono. Es decir, debe existir m(t) > 0 tal que se verifica:

$$E_t\left[m(t+1)\, b_{t+1}^{n-1}\right] = b_t^n \Rightarrow E_t\left[m(t+1)\, r_t^n\right] = 1 \qquad (1)$$

donde $r_t^n = \dfrac{b_{t+1}^{n-1}}{b_t^n}$ es el rendimiento bruto (sin descontar la inversión inicial) de la estrategia consistente en adquirir el bono en t y venderlo en t+1. Naturalmente, $b_t^1 = E_t[m(t+1)]$ puesto que $b_t^0 = 1$, para todo t.

Por lo tanto, si no existen oportunidades de arbitraje, el rendimiento descontado de todas las estrategias de inversión tienen el mismo valor esperado.

---

[1] Este tema aparece didácticamente tratado en Huang y Litzenberger (1988) y Duffie (1993).

Los modelos convencionales de valoración se derivan de las condiciones de equilibrio de los inversores cuyo comportamiento se modeliza por medio de una estructura especifica de preferencias. Esas condiciones de equilibrio son incompatibles con la existencia de oportunidades de arbitraje y, por lo tanto, satisfacen la condición (1). Por lo tanto, de cada modelo se deriva una especificación concreta del factor de descuento m, que en el modelo CAPM estático es una función de la tasa de rendimiento de la cartera agregada de la economía. Por su parte, en el CAPM con consumo (CCAPM), m es una función de la tasa de crecimiento del consumo y de la tasa de inflación.

Un caso particular interesante es aquel en el cual la condición (1) se verifica con un factor de descuento m(t) constante. En este caso, la condición de no arbitraje implica que el rendimiento esperado de todas las estrategias de inversión deben ser iguales. Esta especificación del factor del descuento se corresponde con la neutralidad al riesgo de los agentes[2]: cuando los agentes se despreocupan del riesgo relativo de las diferentes estrategias y solo prestan atención al valor esperado de los rendimientos, estos deben ser iguales en equilibrio para impedir la permanencia de posibles recomposiciones ventajosas de la cartera.

En este trabajo, se evitará utilizar un modelo de valoración concreto. En su lugar, se utilizará la información contenida en los precios cotizados de bonos a distintos plazos para identificar la distribución del factor de descuento m. De la especificación obtenida del factor de descuento dependerá, fundamentalmente, la forma de la curva de rendimientos.

---

[2] Siendo rigurosos, dado que r_t^n está definido en términos nominales, la constancia del factor de descuento exige, además de neutralidad ante el riesgo, una reducida variabilidad de la tasa de inflación.

2.3 Hipótesis expectacional y primas de riesgo

La hipótesis expectacional de los tipos de interés es, posiblemente, la más utilizada para expresar la relación entre tipos de interés a corto y largo plazo. Aunque ha sido expresada de maneras muy diversas, la idea subyacente es, en todas ellas, que los tipos a largo plazo vienen determinados por las expectativas de evolución futura de los tipos a corto.

En esta sección, centraremos nuestra atención en las dos formulaciones más habituales de la teoría expectacional[3]: i) El tipo en t de un contrato forward sobre tipos de interés entre t+k y t+k+h es igual a la expectativa en t del tipo de interés al plazo h en el momento t+k, e ii) El tipo de interés a un determinado plazo n en t es una media de los tipos de interés a corto plazo esperados entre t y t+n.

La formulación i) de la hipótesis expectacional indica que los tipos forward son predictores insesgados de los tipos a corto futuros. Es decir, para todo k y n se verifica:

$$E_t\left[i^k_{t+n}\right] = f^{n,k}_t \qquad (2)$$

Con objeto de discutir los fundamentos teóricos de esta hipótesis, consideremos dos estrategias alternativas. En la primera de ellas, el individuo invierte en t en un bono que vence en t+n. En ese momento, invierte lo ganado en un bono que vence en t+n+k. En la segunda estrategia, el individuo invierte directamente en t en un bono que vence en t+n+k.

El rendimiento bruto de la primera estrategia es

---

[3] Ver Cox, Ingersoll y Ross (1985) para un análisis pormenorizado en tiempo continuo de estas hipótesis.

$$\frac{1}{S_t^n} \cdot \frac{1}{S_{t+n}^k}$$

mientras que el rendimiento de la segunda estrategia es $1/S_t^{n+k}$. Argumentos de no arbitraje similares a los definidos con anterioridad indican que el rendimiento descontado de ambas estrategias deben ser iguales:

$$E_t\left[m\,(t+n+k)\cdot\frac{1}{S_t^n}\cdot\frac{1}{S_{t+n}^k}\right] = E_t\left[m(t+n+k)\cdot\frac{1}{S_t^{n+k}}\right] = 1$$

donde m(t+n+k) es el factor de descuento aplicable a estrategias de inversión con n+k periodos de maduración.

De este modo:

$$E_t\left[m(t+n+k)\cdot\frac{1}{S_{t+n}^k}\right] = E_t\left[m(t+n+k)\right]\cdot\frac{S_t^n}{S_t^{n+k}}$$

Tomando una aproximación lognormal, y, utilizando la definición del tipo forward $f_t^{r,k}$, se verifica que

$$f_t^{n,k} = E_t\left[i_{t+n}^k\right] - PF_t^{n,k} \qquad (3)$$

donde $PF_t^{n,k}$ es la prima exigida a un seguro de tipos de interés entre t+n y t+n+k contraído en t. Esta prima forward tiene la forma

$$PF_t^{n,k} = -\frac{k}{2}\,Var_t\left[i_{t+n}^k\right] - Cov_t\left[i_{t+n}^k,\ m\,(t+n+k)\right] \qquad (4)$$

La prima forward tiene un signo indefinido a priori que depende del signo y del valor absoluto de la covarianza entre los tipos de interés y el factor de descuento. De este modo, no es posible determinar a priori si la estrategia arriesgada (que no asegura el tipo de interés futuro) ofrece una rentabilidad esperada mayor o menor que la de la estrategia no arriesgada (que asegura el tipo de interés futuro).

De las expresiones (2) y (3) se obtiene que la formulación i) de la hipótesis expectacional puede resumirse en la condición $PF_t^{n,k} = 0$ para todo n,k. De la expresión (4) se deriva que esta hipótesis solo se verifica en sentido estricto, si los tipos de interés son constantes en el tiempo. De este modo, la perfecta diversificabilidad del riesgo de tipos de interés $(Cov_t\ (m\ (t+n+k),i_{t+n}^k) = 0$ no garantiza $PF_t^{n,k} = 0$ y, por lo tanto, la verificación de la formulación i) de la hipótesis expectacional.

Para analizar la formulación ii) de la hipótesis expectacional, solo es necesario recordar que los tipos al contado pueden expresarse como medias de los tipos forward. Es decir,

$$i_t^n = \frac{k}{n} \sum_{j=0}^{(n-k)/k} f_t^{jk,k}$$

Definiendo la prima por reinversión en el momento t, al horizonte n con instrumentos a k períodos (k<n) como la diferencia entre la rentabilidad esperada de invertir en instrumentos a corto plazo (k) durante el horizonte n y la de invertir en un bono a largo plazo (n) se obtiene que

$$PR_t^{n,k} \equiv \frac{k}{n} E_t \sum_{j=0}^{(n-k)/k} i_{t+j}^k - i_t^n = \frac{k}{n}\left[E_t \sum_{j=0}^{(n-k)/k} \left(i_{t+j}^k - f_t^{jk,k}\right)\right] =$$

$$= \frac{k}{n} \sum_{j=0}^{(n-k)/k} PF_t^{jk,k} \qquad (5)$$

Es decir, la prima de reinversión con instrumentos al plazo k, durante un horizonte n (k<n) es la media de las primas forward correspondientes a tipos de interés al plazo k durante el horizonte de reinversión.

Así, pues, las primas de reinversión solo serán 0 si lo son las primas forward o si estas se cancelan unas con otras durante el horizonte de reinversión. En el caso, que analizaremos en la siguiente sección, en que las primas forward guardan (en valor absoluto) una relación creciente con el plazo del contrato, la prima forward a un horizonte n será superior a la prima de reinversión a ese mismo horizonte

$$\left(|PF_t^{n,k}| > |PR_t^{n,k}|\right).$$

En todo caso, queda patente que la evaluación de las primas de reinversión y forward y, por lo tanto, el contraste de ambas formulaciones de la teoría expectacional exige una especificación del factor de descuento. La siguiente sección se dedica a este tema.

3. LA MODELIZACIÓN DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS

En esta sección, se propone un test de la teoría expectacional y un método para estimar las primas forward y de reinversión. Este método hace uso de la tecnología desarrollada por Backus y Zin (1994) para derivar la curva de rendimientos utilizando estrictamente condiciones de no arbitraje del tipo (1).

3.1. Factor de descuento y tipos de interés

Tomemos como punto de partida la ecuación (1) y supongamos que el factor de descuento, m(t), sigue un proceso MA infinito:

$$-\log m_t = \delta + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \, \epsilon_{t-j} \qquad (6)$$

con $\epsilon_t \sim_{t-1} N(0,\sigma^2)$ y $\alpha_0 = 1$.

Haciendo uso de la especificación (6), de la hipótesis de lognormalidad de m_t y de la ecuación (1), se puede probar que el precio del bono a n períodos S_t^n sigue el proceso MA infinito

$$-\log S_t^n = \mu_n + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j^n \, \epsilon_{t-j} \qquad (7)$$

donde los coeficientes μ^n y β_j^n se obtienen por medio de las siguientes ecuaciones recursivas:

$$\mu^{n+1} = \mu^{n} + \delta - \left(\alpha_0 + \beta_0^{n}\right)^2 \sigma^2 / 2$$

$$\beta_j^{n+1} = \beta_{j+1}^{n} + \alpha_{j+1}$$

Dado que $\log b_t^0 = 0$, entonces $\mu^0 = \beta_j^0 = 0$. Definiendo las sumas parciales de coeficientes MA: como $A_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j$, podemos expresar los coeficientes del proceso seguido por $\log b_t^n$ como

$$\beta_j^n = A_{n+j} - A_j \quad \text{y}$$

$$\mu^n = n\delta - (\sigma^2/2) \sum_{j=1}^{n} A_{j-1}^2$$

De este modo, conociendo el proceso seguido por el factor de descuento, es posible obtener el proceso seguido por el precio de los bonos cupón-0 a cualquier plazo. Naturalmente, es también posible caracterizar la distribución de los rendimientos y de los tipos forward:

Así, dado que $f_t^{n,k} = -\log\left(S_t^n / S_t^{n+k}\right) \cdot \frac{1}{k}$, entonces

$$f_t^{n,k} = \left(\mu^{n+k} - \mu^n\right) + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\beta_j^{n+k} - \beta_j^n\right) \epsilon_{t-j}$$

En concreto, para el tipo forward a 1 periodo, esta expresión implica

$$f_t^{n,1} = \delta - A_n^2 \sigma^2 / 2 + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{n+1+j}\, \epsilon_{t-j} \tag{8}$$

Como los tipos de interés a distintos plazos son medias de los tipos forward a 1 periodo durante ese plazo, tenemos que

$$i_t^n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_t^{j-1} = \frac{\delta}{n} - \frac{\sigma^2}{2n}\sum_{j=0}^{n-1} A_j^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\left(A_{n+j} - A_n\right)\epsilon_{t-j} \qquad (9)$$

En concreto, el tipo de interés a 1 período tiene la forma

$$i_t^1 = \delta - \frac{\sigma^2}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j+1}\,\epsilon_{t-j} \qquad (10)$$

Así, pues, el proceso seguido por m_t determina completamente la curva de rendimientos. Por lo tanto, aspectos como la pendiente de la curva y las primas de reinversión y por plazo deben poder expresarse en términos de los parámetros α's y de la varianza de la innovación σ.

3.2. La estacionariedad de los tipos de interés

Las expresiones (8) y (10) resultan muy informativas sobre las implicaciones de la no estacionariedad de los tipos de interés.

De acuerdo con la expresión (10), si el tipo de interés sigue un paseo aleatorio, los coeficientes del proceso seguido por el factor de descuento satisfacen $\{\alpha_j = 1 \; ; \; j \geq 1\}$. De este modo, la secuencia $\{ A_n \}^2$ tiene la forma divergente $\{ (1+n)^2 \}$. Según señala la ecuación (8), el supuesto de no estacionariedad del tipo de interés implica que la curva forward no converge según se incrementa el horizonte n. Este resultado carece de racionalidad económica y, de hecho, entra en contradicción con los métodos modernos de estimación de la estructura temporal de los tipos de interés asociados a bonos cupón-0 sintéticos a partir de los precios de bonos con cupón positivo (ver Nelson y Siegel, 1984, y Svensson, 1993).

3.3 Primas forward y de reinversión

De acuerdo con las ecuaciones (4) y (8), la prima de un contrato forward sobre tipos de interés a k períodos, dentro de n periodos tiene la forma:

$$PF_t^{n,k} = \frac{1}{k}\left[E_t\left(i_{t+n}^k\right) - f_t^{n,k}\right] = \frac{\sigma^2}{2}\left[A_n^2 - A_{k-1}^2\right] \qquad (11)$$

Similarmente, las primas de reinversión al horizonte n con instrumentos a k-periodos tienen la forma

$$PR_t^{n,k} = \frac{k}{n}\sum_{j=0}^{(n-k)/k}\left[E_t\left(i_{t+jk}^k\right) - f_t^{jk,k}\right] = \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} A_{j-1}^2 - \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} A_{j-1}^2\right]$$

De este modo, las primas forward y de reinversión solo serán 0 si los parámetros del proceso seguido por el factor de descuento son todos iguales a cero ($\alpha_j = A_j = 0$ para todo j). Es decir, el factor de descuento debe seguir un proceso de ruido blanco que, de acuerdo con la expresión (10), implica que el tipo de interés debe ser constante.

Nótese, además, que las primas forward son siempre no decrecientes con el plazo en valor absoluto y que, por lo tanto, las primas de reinversión son siempre inferiores a las primas forward para el mismo horizonte e instrumento.

3.5 La curva volatilidad-plazo

El método seguido para modelizar la curva de rendimientos permite también determinar la estructura temporal teórica de la volatilidad de los tipos de interés. De especial interés es la determinación de la estructura temporal de la volatilidad de los tipos forward a 1 periodo. De la expresión (8) se deriva que la varianza del tipo forward a un horizonte de n periodos tiene la expresión

$$\operatorname{Var}\left(f_t^{n,1}\right) = \sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{n+1+j}^2 \qquad (13)$$

De este modo, la volatilidad de los tipos forward decrece con el horizonte n. Esta propiedad sugiere que los momentos centrados correspondientes a tipos forward y al contado a plazos lejanos son de más fácil estimación que los de los correspondientes plazos cortos. Esta propiedad será explotada en el proceso de estimación.

4. LA ESTIMACIÓN DEL PROCESO DEL FACTOR DE DESCUENTO

El análisis hasta ahora efectuado sugiere que todos los aspectos relevantes de la curva de rendimientos pueden determinarse si se conocen los parámetros del proceso que sigue el factor de descuento m. Dado que hemos supuesto un proceso univariante para esta variable, los precios son derivados de las realizaciones de una sola variable de estado. En este sentido, el análisis se asemeja al efectuado por Cox, Ingersoll y Ross (1985), suponiendo un proceso concreto para el tipo de interés a corto plazo. No obstante, como se deriva de la expresión (10), incluso suponiendo un proceso ARMA "parsimonioso" para el factor de descuento, no es posible identificar todos los parámetros del proceso seguido por esta variable si solo se cuenta con el proceso seguido por el tipo de interés a 1 periodo (i_t^1). De este modo, resulta necesario combinar la información contenida en los tipos de interés de bonos a distintos plazos.

En Backus y Zin (1994), se caracteriza la distribución del factor de descuento como un proceso ARMA cuyos parámetros son obtenidos combinando estadísticos que miden la dependencia serial de los tipos de interés a 1 mes con los excesos de rendimientos medios de tipos de interés a distintos plazos sobre los tipos de interés a 1 periodo. Este procedimiento permite identificar todos los parámetros del modelo, pero contiene algunos inconvenientes. En primer lugar, la utilización de tipos de interés a distintos plazos con una frecuencia mensual genera un problema de información superpuesta que dificulta el proceso de estimación. En segundo lugar, dado que los tipos de interés son variables que muestran una gran dependencia serial (memoria larga), la estimación de sus momentos centrados puede resultar dificultosa, especialmente si se cuenta con series de longitud reducida.

En este trabajo, se ha intentado solventar estos problemas de la siguiente manera. En primer lugar, con objeto de eliminar el problema de información superpuesta, no se han utilizado los tipos al contado, sino los tipos *forward* mensuales a distintos horizontes. Como se ha visto, la curva *forward* contiene la misma información que la curva de tipos al contado y resulta más tratable en este contexto. En segundo lugar, se han considerado tan solo tipos a plazos superiores a 1 año, con objeto de aprovechar la menor variabilidad de estos con respecto a los de vencimiento inferior. Esta práctica debe permitir mejorar la precisión de la estimación de los momentos muestrales sin ignorar información crucial. Finalmente, además de estadisticos de dependencia serial y medias muestrales, se ha utilizado la información contenida en la curva volatilidad-plazo de los tipos *forward* utilizados con objeto de proporcionar mayor solidez a las estimaciones.

Con objeto de obtener una intuición de la forma en que los distintos estadisticos muestrales de los tipos de interés afectan al proceso estimado para el factor de descuento, considérese que este tiene la forma ARMA (1,1):

$$-\log m(t) = \delta(1-\phi) - \phi \log m(t-1) + \Theta\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \qquad (14)$$

En este caso, se puede comprobar que los coeficientes del proceso MA infinito para m(t) satisfacen: $\alpha_j = \phi^{j-1}(\phi+\Theta) \quad j\geq 1$ y $A_n = 1+(\phi+\Theta)(1-\phi^n)/(1-\phi)$. Esta especificación permite expresar la media de los tipos *forward* al plazo n como

$$E(f_t^{n,1}) = \delta - \frac{\sigma^2}{2}\left[1+\frac{(\phi+\Theta)(1-\phi^n)}{1-\phi}\right]^2 \qquad (15)$$

Las autocovarianzas de los tipos *forward* tienen la forma

$$\mathrm{Cov}(f_t^{n,1}, f_{t+k}^{n,1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{n+j}\alpha_{n+j+k} = \phi^{2n}\mathrm{Cov}(f_t^{n,1}, f_{t+k}^{n,1}),\ k=0,1,.. \tag{16}$$

Por lo tanto, la varianza de los tipos forward decrece con el horizonte n de forma muy intensa, a la tasa ϕ^2. Por su parte, es inmediato comprobar que la función de autocorrelacion de los tipos forward es simplemente:

$$\mathrm{Corr}(f_t^{n,1}, f_{t+k}^{n,1}) = \mathrm{Corr}(i_t^1, i_{t+k}^1) = \phi^k \quad k,n = 1...$$

De acuerdo con la expresión (15), la pendiente de la curva forward media depende, básicamente, de la varianza de la innovación (σ^2) y de la suma de los términos AR y MA ($\phi+\Theta$). La pendiente será positiva si la suma de los parámetros es negativa, y negativa, si esa suma es positiva. En el límite, si ambos términos suman cero (los polinomios MA y AR se cancelan), la curva forward media es plana.

La elevada persistencia de los tipos de interés sugiere un coeficiente muy elevado. Este coeficiente se ve también afectado por la pendiente de la curva volatilidad-plazo. En la medida en que, en general, esta curva decae muy suavemente, la ecuación (16) indica que la estructura temporal de la volatilidad de los tipos forward confirma la elevada probabilidad de encontrar un coeficiente muy cercano a la unidad.

5. RESULTADOS EMPÍRICOS

En esta sección, se presentan los resultados relativos a la estimación del factor de descuento. Asimismo, se estiman las primas de reinversión y forward medias y se evalúa la verosimilitud de la hipótesis expectacional.

Los datos utilizados son tipos de interés forward estimados a partir de los precios de diversos instrumentos de deuda pública cotizados en el mercado nacional de anotaciones en cuenta. Estas estimaciones han sido realizadas por Núñez (1995) a partir de la metodología propuesta por Nelson y Siegel (1987) y modificada por Svensson (1993). Desafortunadamente, en el momento actual solo se cuenta con tipos de interés cupón-cero para el periodo enero, 1991-julio, 1995.

En el gráfico 1, se presentan los tipos forward a 1 mes para diversos horizontes. Todos los tipos representados muestran una gran persistencia, aunque su volatilidad decrece con el horizonte considerado. De este modo, si bien la estimación de la media del tipo a 1 mes parece muy ardua, esta dificultad decrece a medida que se consideran tipos forward a horizontes más lejanos. Esta regulariad avala la decisión de prescindir en el proceso de estimación de los momentos muestrales de los tipos a horizontes muy cortos. La utilización de tipos forward con horizontes iguales o superiores a 12 meses resulta de un compromiso entre la necesidad de aminorar el problema de estimación de medias anteriormente señalado y de la conveniencia de considerar la información contenida en los tramos menos largos de la curva.

5.1 El factor de descuento

El primer paso consiste en proponer y estimar un proceso univariante para el factor de descuento m(t). En este trabajo, se han supuesto 3 procesos univariantes: ARMA(1,1), ARMA(2,1) y ARMA(2,2). Su estimación se ha realizado por el Método Generalizado de Momentos (GMM), utilizando los siguientes momentos: autocovarianzas de orden 0,1,3, 5 y 10 del tipo del contrato forward sobre tipos a 1 mes con horizonte de 1 año ($f_t^{12,1}$); excesos del tipo forward señalado sobre los forward medios a los horizontes de 36, 60, 84 y 120 meses; y varianzas de los tipos forward a los horizontes de 12, 36, 60, 84 y 120 meses. Estos momentos permiten identificar los términos AR y MA de cada proceso y la varianza residual correspondiente. El parámetro que determina el nivel medio de la curva (δ) ha sido omitido por su irrelevancia en el análisis.

Como quiera que se utilizan datos mensuales de forwards definidos sobre tipos a 1 mes, el problema de superposición de información que típicamente contienen los trabajos afines a este desaparece. No obstante, con objeto de mejorar la eficiencia de los estimadores y realizar una inferencia correcta, las estimaciones se han realizado utilizando el método de Newey-West (con 4 retardos), para construir la matriz de ponderaciones de los momentos y los errores estándar de los parámetros.

En el cuadro 1, figuran los resultados de la estimación del modelo para los tres procesos propuestos para el factor de descuento. Como se observa, en todos los modelos los parámetros estimados son significativos y el ajuste es muy satisfactorio, no permitiéndose el rechazo de la hipótesis nula de una correcta especificación del modelo para niveles de confianza, en todos los casos, muy elevados. No obstante, los modelos más generales parecen añadir poco poder explicativo al correspondiente al modelo más sencillo y reducen la precisión de los estimadores de modo notorio. Por este motivo, el análisis que sigue se centrará en el modelo ARMA (1,1).

El coeficiente ϕ estimado es coherente con la elevada correlación muestral de los tipos forward que oscilan entre 0,85 y 0,95 y la reducida pendiente de la curva volatilidad-plazo (ver gráfico 2). Por su parte, el parámetro Θ estimado, muy próximo en valor absoluto al estimador del coeficiente autorregresivo, indica que el proceso del factor de descuento está próximo al ruido blanco que implicaría una curva de rendimientos plana y la ausencia de primas de riesgo de tipos de interés. No obstante, la diferencia entre el valor absoluto de ambos parámetros es estadísticamente significativa, lo que permite rechazar formalmente que las primas forward y de reinversión sean nulas.

5.2 Primas de riesgo

El cuadro 2 presenta la estimación de la prima forward - diferencia entre el tipo de interés a 1 y 12 meses esperado para dentro de un determinado horizonte y el tipo forward correspondiente. Por su parte, el cuadro 3 presenta los resultados de la estimación de las primas de reinversión -diferencia de rendimientos esperados de las estrategia de inversión a corto y largo plazo- para distintos horizontes.

Como se observa, las primas estimadas son todas ellas positivas, que es el resultado esperado cuando la curva de forward media tiene pendiente negativa predominante en los tramos considerados. Por lo tanto, la estrategia de inversión a largo plazo ofrece una rentabilidad esperada inferior a la estrategia de reinversión a corto plazo. De este modo, los resultados son contrarios a la llamada hipótesis de la preferencia por la liquidez bajo la cual los agentes prefieren inversiones a corto plazo con el objeto de reducir la variabilidad en el valor de mercado de su inversión como consecuencia de los movimientos en los tipos de interés.

Como era esperable, las primas forward crecen de forma monótona con el horizonte. La primas sobre instrumentos a 1 mes son relativamente reducidas en los plazos cortos y crecen de forma moderada, superando los 50 puntos básicos solo cuando se supera el horizonte de los cinco años. Estas primas se reducen de forma significativa si se consideran tipos a 1 año, donde el medio punto se supera en torno a un horizonte de 7 años.

Las primas de reinversión son, lógicamente, más reducidas para los mismos horizontes. Estas son prácticamente insignificantes hasta un horizonte de tres años, muy reducidas si se llega hasta los cinco años y solo superan los 30 puntos básicos cuando se sobrepasa el horizonte de 84 meses para el caso de instrumentos a 1 mes y el horizonte de 100 meses para el caso de tipos de interés a 1 año.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo, se ha realizado una primera aproximación al análisis de los determinantes de la curva de rendimientos española en los últimos años. En concreto, se ha contrastado la verosimilitud de la hipótesis expectacional evaluando el tamaño de las primas de riesgo de tipo de interés. De este modo, se ha analizado la capacidad de las expectativas sobre la evolución de los tipos de interés futuros a corto plazo para explicar los tipos de interés a largo plazo.

El análisis se ha efectuado explotando las condiciones de no arbitraje en el mercado de bonos que exigen la existencia de un factor de descuento común para los distintos rendimientos. Para ello se ha utilizado, esencialmente, la metodología propuesta por Backus y Zin (1994) para identificar y estimar el proceso seguido por el factor de descuento que evita la adopción de un modelo concreto de valoración de activos. A continuación, se han derivado expresiones para la prima de reinversión y la prima <u>forward</u> a diversos horizontes y obtenido las condiciones bajo las cuales la teoría expectacional se verifica.

Los resultados obtenidos rechazan la hipótesis expectacional de la curva de rendimientos, aunque sugieren que las primas de riesgo son moderadas o bajas. En particular, los tipos a largo plazo parecen proporcionar una aproximación razonable a la media de los tipos a corto, esperados incluso para horizontes relativamente lejanos. Algo más de cautela debe tenerse en la utilización de los tipos <u>forward</u> para medir las expectativas sobre tipos de interés a horizontes largos. Las estimaciones realizadas sugieren que esta práctica es solo apropiada para horizontes medios (inferiores a 5 años) y utilizando tipos de contratos <u>forward</u> definidos sobre tipos de interés a plazos no muy cortos (1 año o superior).

En todo caso, los resultados aquí presentados tienen el carácter de preliminar por diversas razones. En primer lugar, la muestra disponible es todavia muy corta, lo que, posiblemente, dificulta la utilización de los resultados fuera de la muestra empleada para su obtención. En segundo lugar, el modelo empleado, aunque no rechazado por los datos, es susceptible de mejora. En concreto, la utilización de procesos multivariantes, en lugar de univariantes, para el factor de descuento debe permitir definir con mayor precisión la curva de rendimientos implícita. Finalmente, la relajación del supuesto de homocedasticidad condicional del factor de descuento debe enriquecer el análisis, permitiendo obtener estimaciones no solo del tamaño medio de las primas de riesgo, sino también de su variabilidad temporal.

CUADRO 1: RESULTADOS DE LA ESTIMACIÓN GMM (*)

Modelo: $\varphi(L)m_t = 0\ \ \delta(1-\varphi(1)) + \Theta(L)\epsilon_t$; $Var(\epsilon_t)=\sigma^2$

	ARMA (1,1)	ARMA (2,1)	ARMA (2,2)
φ_1	0,985 (0,51x10^{-2})	1,190 (0,98x10^{-2})	1,221 (0,018)
φ_2		-0,201 (0,124)	-0,253 (0,141)
Θ_1	-0,979 (0,48x10^{-2})	-0,921 (0,75x10-^{2})	-0,871 (0,016)
Θ_2			-0,038 (0,095)
σ	0,038 (0,1x10^{-2})	0,07 (0,2x10^{-2})	0,13 (0,4x10^{-2})
p	0,507	0,499	0,443

(*) Errores estándar entre paréntesis. p es el valor p del contraste de las condiciones de sobreidentificación (Test J de Hansen). Momentos ajustados: Autocovarianzas de orden 0, 1, 3, 5 y 10 del tipo forward a 12 meses; diferencia de la media del forward a 12 meses y la de los forward a 36, 60, 84 y 120 meses; varianzas de los forward a los horizontes 12, 36, 60, 84 y 120 meses.

CUADRO 2: PRIMAS FORWARD(*)

Modelo: ARMA (1,1)

Horizonte	Tipos a 1 mes	Tipos a 12 meses
1 mes	0,010	0,009
3 meses	0,031	0,029
12 meses	0,119	0,113
36 meses	0,318	0,301
60 meses	0,470	0,443
120 meses	0,698	0,548

(*) Diferencia entre tipos esperados y forward.

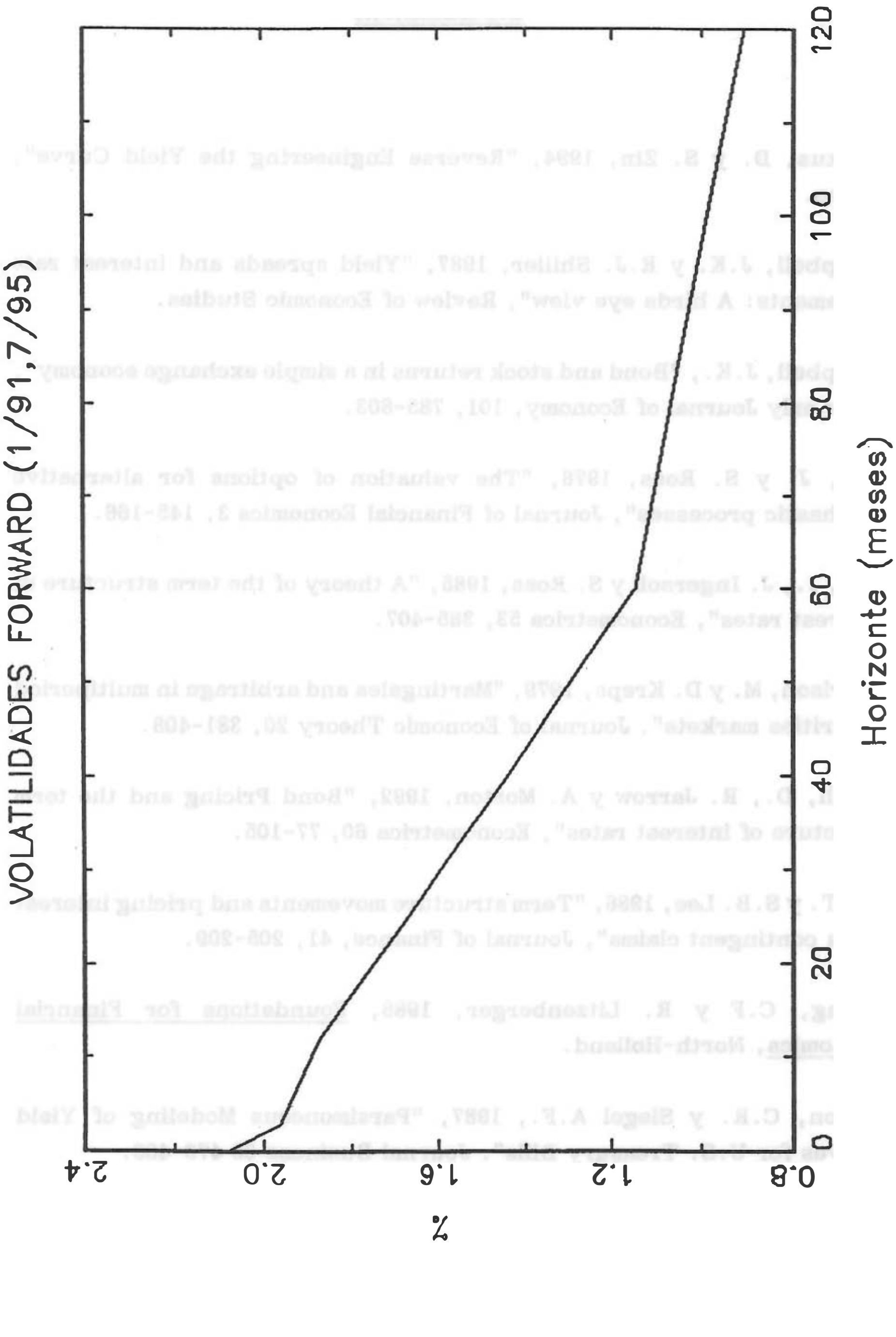
CUADRO 3: PRIMAS DE REINVERSIÓN(*)

Modelo: ARMA (1,1)

Horizonte	Tipos a 1 mes	Tipos a 12 meses
1 mes	0	-
3 meses	0,010	-
12 meses	0,055	0
36 meses	0,164	0,108
60 meses	0,318	0,201
120 meses	0,427	0,371

(*) Diferencia entre la media de los tipos a corto esperados y tipos a largo para cada horizonte.

TIPOS DE INTERÉS CONTADO Y FORWARD


VOLATILIDADES FORWARD (1/91,7/95)
Horizonte (meses)
%
0
20
40
60
80
100
120
0.8
1.2
1.6
2.0
2.4

BIBLIOGRAFÍA

Backus, D. y S. Zin, 1994, "Reverse Engineering the Yield Curve", Mimeo.

Campbell, J.K. y R.J. Shiller, 1987, "Yield spreads and interest rate movements: A birds eye view", Review of Economic Studies.

Campbell, J.K., "Bond and stock returns in a simple exchange economy", Quarterly Journal of Economy, 101, 785-803.

Cox, J. y S. Ross, 1976, "The valuation of options for alternative stochastic processes", Journal of Financial Economics 3, 145-166.

Cox, J., J. Ingersoll y S. Ross, 1985, "A theory of the term structure of interest rates", Econometrica 53, 385-407.

Harrison, M. y D. Kreps, 1979, "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets". Journal of Economic Theory 20, 381-408.

Heath, D., R. Jarrow y A. Morton, 1992, "Bond Pricing and the term structure of interest rates", Econometrica 60, 77-105.

Ho, T. y S.B. Lee, 1986, "Term structure movements and pricing interest rates contingent claims", Journal of Finance, 41, 205-209.

Huang, C.F y R. Litzenberger, 1988, Foundations for Financial Economics, North-Holland.

Nelson, C.R. y Siegel A.F., 1987, "Parsimoneous Modeling of Yield Curves for U.S. Treasury Bills". Journal Business 60 473-489.

Núñez, Soledad, 1995, "Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés en España. Elección entre métodos alternativos". Banco de España, Documento de Trabajo #9522.

Restoy, F. y P. Weil, 1995, "Approximate equilibrium asset prices", Banco de España, Documento de Trabajo #9515.

Shiller, R. J., 1990, "The term structure of interest rates", In B.M. Friedman y F.H. Hahn: Handbook of Monetary Economics, Vol I. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.

Svensson L.E.O., 1993, "Estimating Forward Interest Rates", Sveriges Riksbank Quarterly Review, 3, 32-42.

DOCUMENTOS DE TRABAJO (1)

9524 **Luis Julián Álvarez, Fernando C. Ballabriga y Javier Jareño:** Un modelo macroeconométrico trimestral para la economía española.

9525 **Aurora Alejano y Juan M.ª Peñalosa:** La integración financiera de la economía española: efectos sobre los mercados financieros y la política monetaria.

9526 **Ramón Gómez Salvador y Juan J. Dolado:** Creación y destrucción de empleo en España: un análisis descriptivo con datos de la CBBE.

9527 **Santiago Fernández de Lis y Javier Santillán:** Regímenes cambiarios e integración monetaria en Europa.

9528 **Gabriel Quirós:** Mercados financieros alemanes.

9529 **Juan Ayuso Huertas:** ¿Existe un *trade-off* entre riesgo cambiario y riesgo de tipo de interés?

9530 **Fernando Restoy:** Determinantes de la curva de rendimientos: hipótesis expectacional y primas de riesgo.

---

(1) Los Documentos de Trabajo anteriores figuran en el catálogo de publicaciones del Banco de España.

Información: Banco de España
Sección de Publicaciones. Negociado de Distribución y Gestión
Teléfono: 338 51 80
Alcalá, 50. 28014 Madrid